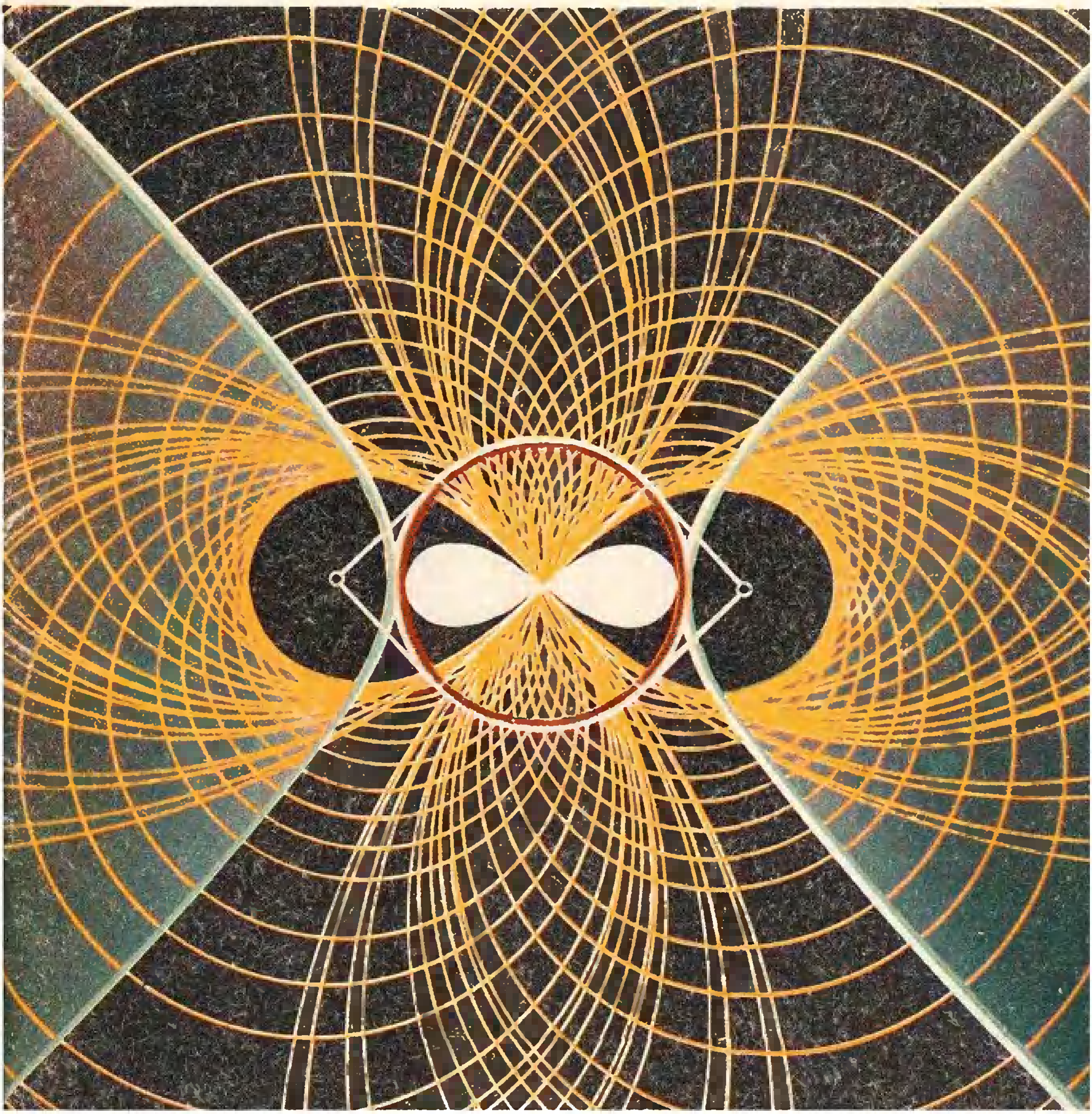
квант

1
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



УКАЗ ПРЕЗИДИУМА ВЕРХОВНОГО СОВЕТА СССР

о награждении генерального секретаря ЦК КПСС Героя Советского Союза, Героя Социалистического Труда Товарища БРЕЖНЕВА Леонида Ильича орденом Ленина и второй медалью «Золотая Звезда»

За выдающиеся заслуги перед Коммунистической партией и Советским государством в коммунистическом строительстве, активную, плодотворную деятельность по упрочению мира и безопасности народов, за большой личный вклад в дело победы над немецко-фашистскими захватчиками в Великой Отечественной войне, в укрепление экономического и оборонного могущества Советского Союза и в связи с семидесятилетием со дня рождения наградить Генерального секретаря ЦК КПСС, Героя Советского Союза, Героя Социалистического Труда товарища Брежнева Леонида Ильича орденом Ленина и второй медалью «Золотая Звезда» Героя Советского Союза.

Председатель Президиума Верховного Совета СССР Н. ПОДГОРНЫЙ.
Секретарь Президиума Верховного Совета СССР М. ГЕОРГАДЗЕ.

Москва, Кремль, 18 декабря 1976 г.

Основан в 1970 году

1977 1

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

На 1-й странице обложки изображена лемниската Бернулли (см. статью В. Березина, с. 25)

В номере:

Всенародная забота о сельской школе

Сельская общеобразовательная школа имеет важное значение в решении задач, поставленных XXV съездом КПСС в области социально-экономического и культурного строительства. Ведь в сельских школах занимается около половины всех учащихся страны.

Конкретные пути развития школьного образования на селе намечены Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О мерах по дальнейшему улучшению условий работы сельской общеобразовательной школы». В нем содержится обширная программа строительства новых и расширения имеющихся школьных зданий и интернатов в сельской местности, укрепления учебно-материальной базы сельских школ, обеспечения их квалифицированными педагогическими кадрами, совершенствования форм и методов обучения и воспитания сельской школьной молодежи.

Летом 1976 года по инициативе Министерства просвещения СССР, ЦК ВЛКСМ и ЦК профсоюза работников просвещения, высшей школы и научных учреждений началось Всесоюзное социалистическое соревнование за улучшение условий работы сельской общеобразовательной школы. Итоги этого соревнования, в котором участвуют учреждения системы Министерства просвещения СССР сельских районов, будут подводиться ежегодно в сентябре. Журнал «Квант» приветствует развертывание этого соревнования и сделает все возможное, чтобы помочь его участникам в совершенствовании обучения сельских школьников математике и физике.

Научно-технический прогресс предъявляет особенно высокие требования к подготовке молодежи — как в городе, так и в деревне. Сегодняшние старшеклассники завтра придут на заводы и поля, на стройки и предприятия транспорта, в научные лаборатории и учреждения культуры, будут своим трудом превращать в реальность грандиозные планы десятой пятилетки. Для того, чтобы этот труд был эффективным и творческим, нужно уже сейчас, на школьной скамье, упорно и настойчиво овладевать знаниями и трудовыми навыками.

Заботы сельской школы стали по-настоящему кровным делом многих физиков и математиков. Отрадно отметить, что список научных учреждений и учебных заведений, тесно связанных со школьниками из села, непрерывно растет, а формы такой связи весьма разнообразны. Ученые, преподаватели вузов, научные работники, студенты стремятся обеспечить сельским школьникам широкие возможности для углубленного изучения математики и физики.

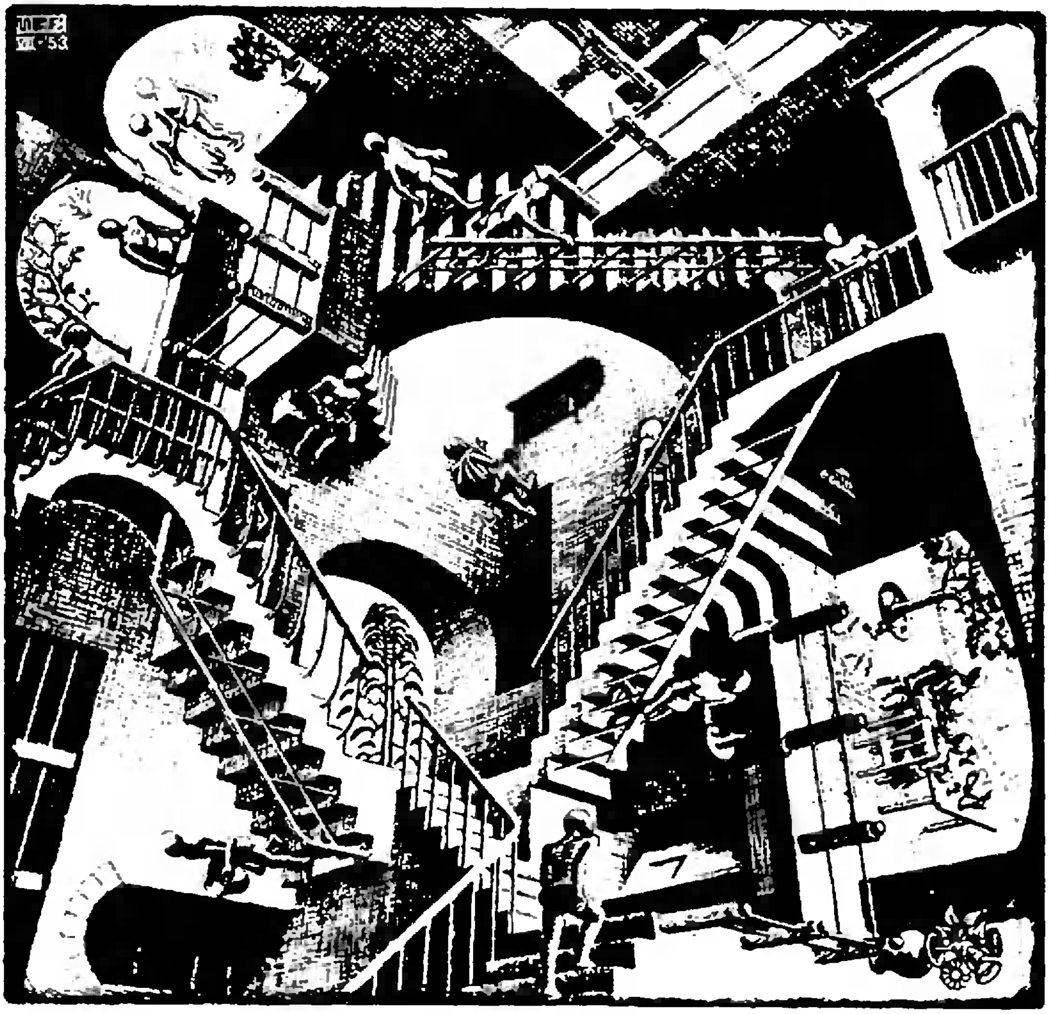
Сотни популярных книг и брошюр по математике и физике написаны известными учеными. Эти книги составили золотой фонд научно-популярной и учебной литературы для юношества и хорошо известны школьникам во всех уголках нашей необъятной Родины. Все больше сельских школьников вовлекаются в юношеские научные общества, участвуют в традиционных физических и математических олимпиадах. Широкое распространение получили летние школы-лагеря, где юноши и девушки сочетают активный отдых с продуктивными занятиями любимым предметом под руководством студентов и молодых ученых. Для талантливой молодежи из сельской местности открыты специальные физико-математические школы-интернаты в ряде городов страны. Десятки тысяч школьников, проживающих в селах, рабочих поселках, небольших городах, вдали от научно-педагогических центров, систематически получают квалифицированное руководство внеклассными занятиями по математике и физике в заочных предметных школах, созданных при университетах, технических и педагогических институтах. Эффективную помощь сельской молодежи оказывают заочные подготовительные курсы, организуемые для поступающих многими вузами и техникумами.

Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» также видят одну из основных своих задач в том, чтобы всемерно содействовать повышению качества знаний сельских школьников по физике и математике, создать благоприятные условия для пробуждения и развития их интереса к этим наукам.

Публикуемые в журнале общие статьи преследуют цель расширить кругозор юного читателя, в популярной доступной форме познакомить его с дополнительными главами математики и физики, с новейшими достижениями науки, рассказать о крупнейших ученых, раскрыть роль и место физики и математики в общей системе человеческих знаний и в практической деятельности человека. Материалы раздела «По страницам школьных учебников» призваны помочь школьнику, в том числе сельскому, лучше осмыслить узловые темы новых школьных программ, получить по ним дополнительную информацию. Раздел «Спрашивайте — отвечаем» предназначен для ответов на вопросы, которые часто задают в своих письмах в редакцию школьники. Статьи, помещаемые в разделах «Математический кружок» и «Лаборатория «Кванта»», направлены на то, чтобы воспитать у читателя вкус к самостоятельным размышлениям, исследованиям, экспериментам. Любители серьезных размышлений всегда найдут в разделе «Задачник «Кванта» интересные и разнообразные задачи — от относительно простых до довольно сложных. Большой интерес для школьников представляет раздел «Практикум абитуриента», позволяющий конкретно познакомиться с требованиями вступительных экзаменов в вузы и техникумы. Самые юные наши читатели находят занимательные и вместе с тем содержательные материалы в разделе «Квант» для младших школьников».

Многочисленные письма учащихся и учителей сельских школ, поступающие в редакцию, свидетельствуют о том, что материалы журнала оказывают большую практическую помощь в классной и внеклассной работе, способствуют углубленному изучению физики и математики сельскими школьниками. «Число читателей журнала «Квант» с каждым годом возрастает, — пишет в своем письме Турдали Мулдабеков, учитель из совхоза «Социализм» Ворошиловского района Сыр-Дарьинской области Узбекской ССР. — Очевидна причина этого: каждый человек, занимающийся математикой и физикой, найдет на его страницах интересные материалы. Известно, что «Квант» — журнал для учащихся старших классов. Но и учителя, работающие в сельской местности, с интересом читают журнал и решают задачи и примеры, публикуемые в нем».

Редакция обращается к сельским школьникам с просьбой и приглашением чаще писать в журнал письма, сообщать свое мнение об опубликованных материалах, присылать конкретные вопросы, высказывать пожелания. Такие письма особенно важны для нас, ибо только живая обратная связь с сельскими читателями позволит журналу максимально удовлетворять их нужды и запросы.



В. Ефремович

ПРОСТРАНСТВО И ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Наше пространство — каково оно?

Геометрия, которую мы изучаем в школе, — это евклидова геометрия. Но верно ли, что пространство, в котором мы живем, устроено именно так? Евклидово ли оно? Выполняются ли в нашем реальном пространстве аксиомы Евклида?

А как же иначе? Ведь аксиомы так очевидны: «Через две точки проходит только одна прямая»; «Каждая прямая бесконечна в обе стороны»; «Перпендикуляр и наклонная к одной прямой непременно пересекаются» и т. д. Кажется, все это так очевидно, что иначе и быть не может! Так и говорил знаменитый немецкий философ И. Кант: «Иначе мыслить нельзя!», то есть существуют истины, познаваемые нами без всякого опыта — «априори». А в подтверждение существования таких «априорных» истин Кант приводил как раз геометрические аксиомы, как факты самоочевидные, обладающие несомненной достоверностью, независимые от всякого опыта. Но вот великий наш соотечественник Н. И. Лобачевский показал, что прекрасно можно мыслить иначе!

Он построил геометрию, в которой все аксиомы Евклида выполняются, кроме одной — третьей из приведенных выше*). Оказалось, что эта геометрия не только не хуже евклидовой, но в некоторых отношениях даже совершеннее ее, богаче.

А можно ли отказаться от других аксиом? Можно ли вообразить, что прямая имеет конечную длину? Разве не ясно, что она бесконечна? Но, позвольте, разве кто-нибудь уходил по прямой так далеко, что убедился в ее бесконечности? Быть может, если мы уйдем по прямой очень-очень далеко, то вдруг окажемся в исходной точке путешествия? «Какое нелепое предположение!» — вероятно, подумали некоторые читатели. А между тем, именно так и произошло бы с человеком, который, полагая, что Земля плоская, отправился бы в некотором направлении, стараясь все время идти по кратчайшей линии (на сфере это — окружность «большого круга»); он думал бы, что идет по прямой, и вдруг пришел бы в начальную точку путешествия.

Быть может, мы только думаем, что прямая бесконечна, а она однажды окажется замкнутой линией вроде окружности, только очень большой длины? Мало ли было чрезвычайно ясных вещей, которые потом оказались просто неверными. Ведь ясно же было (пока люди не знали, что Земля — шар), что вертикали строго параллельны, а оказалось, что они пересекаются в центре Земли. Спутникам Магеллана казалось, что если они будут аккуратно каждый день делать записи в судовом журнале, то, объехав вокруг света (то есть) вокруг Земли) и вернувшись домой, они не ошибутся в счете дней. А все же оказалось, что один день пропал.

Есть веские основания предполагать, что наше пространство устроено сложнее, чем думал Евклид. Как можно изучать пространство, отличное от «употребительного» (выражение Н. И. Лобачевского), очень хорошо показал сам Лобачевский, построив свою геометрию, поэтому для первого знакомства с «неевклидовыми пространствами» часто выбирают геометрию Лобачевского. Мы же расскажем о более наглядных вещах.

*) См. также «Квант», 1976, № 2.

2. Внутренняя геометрия поверхностей

Обычно систематическое изучение геометрии начинают с *планиметрии*, то есть изучения фигур *на плоскости*. Можно изучать фигуры на какой-нибудь другой поверхности, например, на поверхности цилиндра, шара, эллипсоида.

Говоря «поверхность», мы обычно подразумеваем некоторую «пленку», как-то расположенную в пространстве. Однако, говоря «плоскость», мы не пытаемся как-то вложить ее в окружающее пространство. Занимаясь «внутренней геометрией» плоскости, мы изучаем свойства плоскости, отвлекаясь от всего, что находится вне нее, для нас плоскость становится как бы самостоятельным миром; в этом смысле она сама может быть названа «пространством» (двух измерений).

Аналогично, изучая геометрию некоторой поверхности, полезно не пытаться вложить ее в пространство, то есть не различать, скажем, плоскость, цилиндрическую поверхность, построенную на параболе, и двугранный угол (рис. 1) — они получаются друг из друга изгибанием, не меняющим «внутренних свойств» этих поверхностей.

Чтобы лучше понять это определение, вообразим разумное двумерное существо «Кляксу», живущее в поверхности. Все, что может узнать «Клякса» об этой поверхности, измеряя гибким шнуром длины линий на поверхности, транспортиром — углы и т. д., и составляет внутреннюю геометрию поверхности. Для «Кляксы» весь мир сводится к поверхности, в которой она живет, и ничего реального для нее вне этой поверхности нет!

Но оказывается, что для произвольной поверхности построить геометрию, вообще говоря, не просто — на этой поверхности может не найтись даже конгруэнтных треугольников, а ведь именно на конгруэнтности треугольников основываются

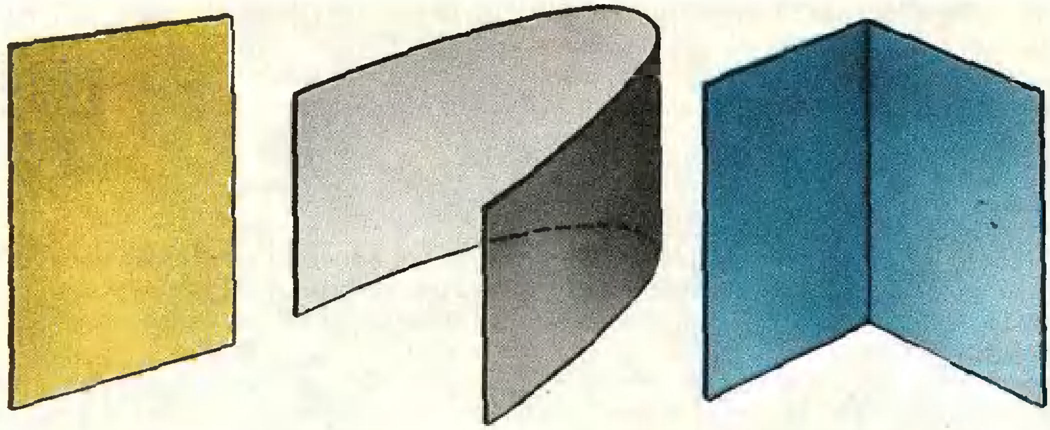


Рис. 1.

первые доказательства в планиметрии! Удобнее всего строить геометрию на поверхностях «однородных» и «изотропных».

В школе вы изучали перемещения плоскости. Напомним, что *перемещением плоскости* называется отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния, то есть длины отрезков, соединяющих две точки. Аналогично *перемещением поверхности* называется отображение этой поверхности на себя, сохраняющее длины всех линий на ней. Такие отображения называются также *изометриями*. Подчеркнем, что мы не определяем здесь понятия «длина линии»; вам достаточно представлять себе линию на поверхности как нитку, которую можно отделить от поверхности, приложить к «метру» и измерить ее длину.

Поверхность называется *однородной*, если для любых двух ее точек A и B можно указать изометрию поверхности, при котором точка A отображается в точку B. Это значит, что поверхность «одинаково устроена около любой своей точки». Такова, например, поверхность бесконечного круглого цилиндра (рис. 2).

Поверхность называется *изотропной в некоторой ее точке* A, если какие бы два «направления» Am и An, исходящие из A, на ней ни взять (рис. 3), существует перемещение поверхности, при котором точка A остается на месте, а Am переходит в An. Например, любая поверхность вращения, пересекающая ось вращения в точке A, изотропна в A.

Поверхность называется *изотропной*, если она изотропна в каждой своей точке. Интересно, что изотропная поверхность всегда однородна.

Одним из примеров изотропных поверхностей является плоскость; ниже мы рассмотрим еще один — сферу.

3. Геодезические линии

Расстоянием между точками A и B на поверхности естественно называть длину кратчайшей линии, соединяющей эти точки и целиком лежащей на поверхности. Поэтому во внутренней геометрии любой поверхности особенно важны *геодезические линии*: они играют роль прямых. Эти линии определяются так: для любых двух не слишком удаленных друг от друга точек A, B такой линии ее кусок AB короче любой другой линии, соединяющей A с B и лежащей на поверхности.

Вот простой пример. Навернем (без растяжений и сжатий) лист бу-

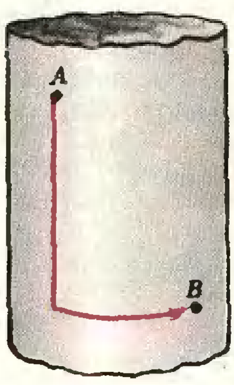


Рис. 2.

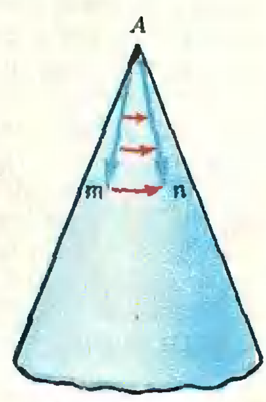


Рис. 3.

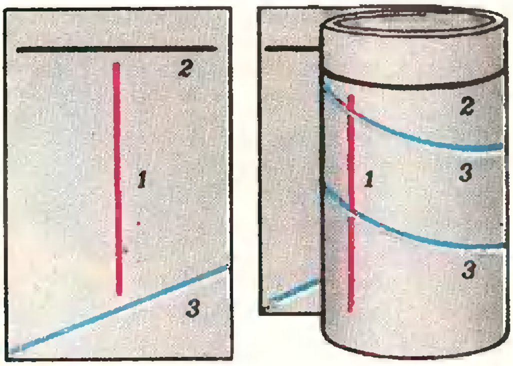


Рис. 4.

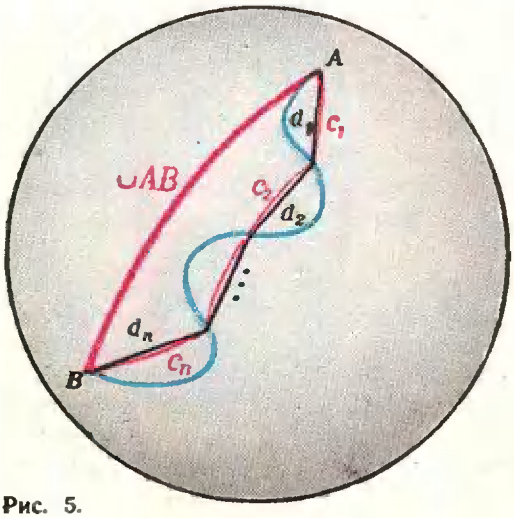


Рис. 5.

маги на прямой круглый цилиндр. Прямые этого листа при таком изгибании дадут геодезические трех родов: некоторые из них вовсе не изогнутся и лягут на образующие цилиндра; другие превратятся в окружности; наконец, третьи превратятся в *винтовые линии* (*рис. 4*). *Только* для геодезической 1-го рода любой ее отрезок будет кратчайшим на поверхности; для геодезических 2-го и 3-го родов только не слишком большие их отрезки будут действительно кратчайшими.

Такое же навертывание можно выполнить на коническую поверхность; там некоторые геодезические будут сами себя пересекать! Проделайте это.

Довольно просто исследовать геодезические на сфере. Оказывается, на сфере геодезическими являются окружности большого круга.

Докажем это. Предположим, что точки A и B на сфере радиуса R удалось соединить линией M длины l и $l = \breve{AB}/k$ $(k>1)$, где AB — дуга большого круга. Разделим кривую M на n равных по длине частей (рис. 5), причем выберем n так, чтобы длина l/n каждой полученной части была достаточно мала, а именно: чтобы в круге радиуса R для любой хорды PQ длины, меньшей l/n, и стягиваемой ею меньшей дуги выполнялось соотношение $\breve{PQ} < |PQ| \cdot k$ (что это возможно при $k>1$, следует из определения длины окружности). Соединим соседние точки деления хордами и меньшими дугами больших кругов. Пусть длины этих дуг равны $c_1, c_2, \ldots, c_n$, а длины хорд $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Теперь заметим, что $c_1 + c_2 + \ldots + c_n \geq \breve{AB} = lk$ (докажите это самостоятельно). Отсюда следует, что хотя бы для одной дуги, например, для дуги с номером i,

$$l/n \leq c_i/k.$$

Но $c_i/k < d_i k/k = d_i$, то есть $l/n < d_i$, что невозможно, поскольку отрезок прямой — кратчайшая из линий, соединяющих две точки.

Подобно тому как на плоскости из точки во все стороны выходят прямые, так и на сфере из любой ее точки по любому «направлению» выходит ровно одна геодезическая. Для полюсов такими геодезическими будут меридианы.

Теперь легко доказать, что даже маленький кусок сферической поверхности нельзя разогнуть (без растяжений и сжатий, хотя бы и очень малых) в кусок плоскости. Для этого из какой-либо внутренней точки сферического куска (примем ее за северный полюс сферы) по меридианам отложим одну и ту же маленькую длину r (маленькую, чтобы не выйти за пределы куска), тогда концевые точки образуют окружность; ее длина l, понятно, будет меньше $2\pi r$, потому что прямолинейный радиус этой окружности меньше r (ее «геодезического радиуса»). Между тем, если бы наш кусок сферы возможно было разогнуть на плоскость, длина окружности и ее геодезический радиус не изменились бы (ведь при изгибании ни одна длина не изменяется, поэтому кратчайшая дуга должна остаться кратчайшей), а на плоскости $l=2\pi r$, — получено противоречие.

4. Геометрия на сфере

Познакомимся теперь несколько подробнее с внутренней геометрией сферы (с внутренней геометрией плоскости вы хорошо знакомы — это планиметрия).

Кратчайшей дугой на сфере служит дуга окружности большого круга. Чтобы найти кратчайший путь на сфере между ее точками A и B, через эти точки и центр O сферы проведем плоскость, она рассечет сферу по окружности; та из двух дуг AmB и AnB этой «большой» окружности, которая короче, и будет кратчайшим путем между A и B. Хорошо, если точки A и B не служат концами одного и того же диаметра — тогда плоскость точками A, B, O определяется однозначно и одна из дуг AmB, AnB непременно короче другой, то есть кратчайший путь между A и B — единственный. Если же A и B диаметрально противоположны, то таких плоскостей, а следовательно, и кратчайших путей, будет бесконечно много — все они одной длины, и короче пути на сфере нет. Таковы, например, все меридианы, связывающие северный полюс с южным.

Внутренняя геометрия сферы во многом схожа с планиметрией, но во многих отношениях и резко от нее отличается. Прежде всего, расстояния на сфере ограничены — они не превышают половины длины окружности большого круга. Роль прямых здесь играют окружности большого круга, роль прямолинейных отрезков — дуги этих окружностей, вмещающие не более 180°. Как мы только что видели, для любых двух точек сферы, если только они не «антиподы», существует единственный отрезок, их соединяющий; для антиподов таких отрезков будет бесконечно много.

Быть может, и в нашей Вселенной найдется пара точек-«антиподов», через которые проходит бесконечное множество прямых? Нам пока приходилось иметь дело лишь со сравнительно близкими точками, с такой парой мы никогда не сталкивались и поэтому

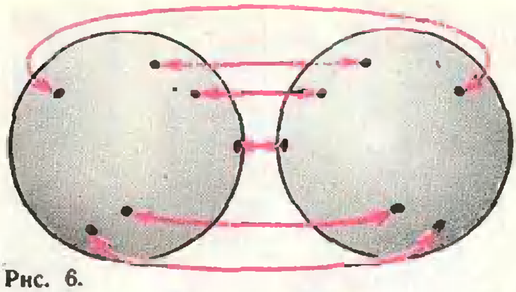


Рис. 6.

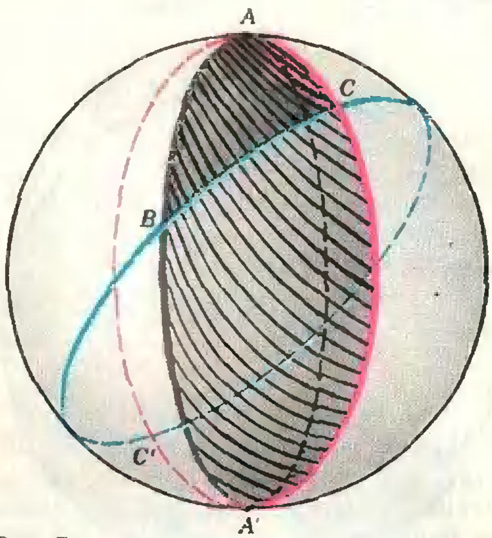


Рис. 7.

стало привычным, что «через две точки проходит только одна прямая».

Однако легко построить модель «вселенной», в которой есть замкнутые прямые, но отличить которую от привычного нам мира на небольших расстояниях невозможно.

Все вы на уроках географии видели изображение поверхности Земли картой из двух кругов — «полушарий», хотя более точным изображением является глобус. А как получить глобус из карты полушарий? Сделать это несложно. Нужно лишь знать правило измерения расстояний в каждом из полушарий и объяснить, как «склеиваются» границы полушарий, то есть как, дойдя до границы одного полушария, попасть в другое.

Так вот, возьмем вместо кругов два шара и «склеим» их границы (см. рис. 6). Получится модель «мира» (трехмерной сферы), небольшие части которого устроены почти так, как обычное трехмерное пространство, но каждая прямая в котором имеет конечную длину.

Вот одно из следствий возможного существования замкнутой «прямой»: если свет распространяется прямолинейно и мы «сверхдальнозорки», то, разговаривая лицом к лицу с приятелем, мы, повернувшись назад, увидим его затылок (каким он был, правда, много миллионов лет назад!). Одно время астрономы допускали, что столкнулись с такой ситуацией: была высказана гипотеза, что слабая весьма далекая туманность М.83 есть просто вид «сзади» на большую внегалактическую туманность М.31 в Андромеде. Но эта гипотеза отпала, так как вскоре в астрономии стали доступны значительно бóльшие расстояния, чем сумма расстояний до М.83 и М.31. Значит, если прямая замкнута и имеет конечную длину, то эта длина много больше.

Как и в планиметрии, на сфере решение задачи обычно сводится к рассмотрению ряда треугольников. *Сферический треугольник* составлен из трех вершин, попарно соединенных кратчайшими дугами — это его стороны. Но на сфере существуют и *двуугольники*, например, два полюса, соединенных двумя меридианами.

Докажем, что сумма углов сферического треугольника всегда больше π *). Для этого вычислим площадь S_{ABC} сферического треугольника ABC, если известны величины его углов $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ (в радианах).

Для наглядности чертеж построим так, чтобы точка A попала в северный полюс сферы (рис. 7). Вычислим сначала площадь $S_{AA'}$ двуугольника, который получится, если продолжить стороны AB и AC до взаимного пересечения в точке A', диаметрально противоположной точке A. Пусть площадь всей сферической поверхности равна S. Ясно, что $S_{AA'}=S\cdot\hat{A}/2\pi$ (так как площадь двуугольника с углом в 2π, очевидно, равна S — это вся сфера). Таким же образом, продолжая стороны угла B, получим двуугольник с площадью $S_{BB'}=S\cdot\hat{B}/2\pi$, а угол C приведет нас к двуугольнику с площадью $S_{CC'}=S\cdot\hat{C}/2\pi$. Продолжая стороны тех же углов в противоположные направления, получим дополнительные двуугольники таких же площадей. Какая часть сферы будет покрыта этими парами двуугольников? Ясно, что они покроют всю сферу, причем треугольники ABC и $A'B'C'$ будут покрыты трижды (для наглядности сделайте такое построение для треугольника ABC на плоскости!). Итак,

$$\frac{2S}{2\pi}\hat{A}+\frac{2S}{2\pi}\hat{B}+\frac{2S}{2\pi}\hat{C}=S+4S_{ABC};$$

отсюда

$$S_{ABC}=\frac{S}{4\pi}\left(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi\right).$$

Площадь треугольника оказалась пропорциональной так называемому «сферическому избытку»

$$\varepsilon=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi.$$

Заметим, что числа S и S_{ABC} положительны, значит, положителен избыток ε, иначе говоря, сумма углов сферического треугольника всегда больше π.

Интересно, что на плоскости Лобачевского сумма углов треугольника всегда меньше π, а его площадь пропорциональна «дефекту» $\delta=\pi-(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})$.

В геометрии на сфере справедливы те же признаки равенства треугольников, что и в планиметрии (по стороне и двум углам, по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам), но есть еще один: по трем углам — на сфере нет подобных треугольников! (Доказательства — те же, что и в планиметрии.)

Упражнения

1 (с очень длинной «бородой»). Дан прямоугольный параллелепипед размером $30\times12\times12$. Найти кратчайший путь по его поверхности между точками A и A', расположенными симметрично относительно центра параллелепипеда на квадратных его гранях на средних вертикалях (для наглядности считаем грани 30×12 полом и потолком), точка A — на высоте 1 над полом, A' — на 1 под потолком. Многие, вероятно, поторопятся: «Длина кратчайшего пути равна 42!» Однако это неверно — есть путь заметно более короткий! Найдите его.

2. Красноярск и Москва лежат почти на одной параллели (56° северной широты). Зная их долготу (93° и 38°) и радиус Земли (6370 *км*), узнать, насколько кратчайший путь короче пути вдоль параллели.

3. Доказать, что:

а) сумма углов $\hat{A}_1+\hat{A}_2+\ldots+\hat{A}_n$ сферического n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ всегда больше, чем $(n-2)\pi$;

б) площадь сферического n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ пропорциональна избытку $\varepsilon=\hat{A}_1+\hat{A}_2+\ldots+\hat{A}_n-(n-2)\pi$.

4. Доказать, что в сферическом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны.

5. Доказать признак равенства сферических треугольников по трем сторонам.

*) *Величиной угла* (или просто *углом*) *между двумя пересекающимися кривыми* называется угол между касательными к этим кривым, проведенными в точке пересечения кривых.

Этому бронзовому гномику около семисот лет. В «молодости» он был своеобразным духом-хранителем домашнего очага. В фигурку наливали воду и ставили ее на тлеющие угольки. Вскоре изо рта гномика начинал вырываться пар. Фигурку помещали перед очагом так, чтобы струя пара была направлена в под печи. Так что гномик раздувал пламя в печи. Дырка в теле гномика является следствием «несчастного случая».

Хотя эту фигурку можно считать просто забавной игрушкой, она несомненно представляет пример использования физического явления. Ведь и линзы, и магниты, прежде чем стать научными инструментами, считались просто игрушками. А к обнаружению гироскопического эффекта привел обыкновенный игрушечный волчок.
В настоящее время этот гномик хранится в Венском музее истории искусств.

С. Шамаш,
Э. Эвенчик

Цикл Карно

С древнейших времен люди пользовались внутренней энергией топлива для приготовления пищи, обогрева жилищ, плавки и обработки металлов. Но после изобретения тепловых двигателей приобрело особое значение применение энергии топлива для приведения в движение различных механизмов. Тепловые двигатели применяются на транспорте и в сельском хозяйстве, в промышленности и в военном деле. Генераторы большинства электростанций приводятся в действие тепловыми двигателями.

Все эти двигатели работают за счет внутренней энергии различных видов топлива, в том числе и ядерного. Понятно поэтому, насколько важно знать способы наиболее эффективного использования этого вида энергии для совершения работы.

Внутренней энергией обладают все тела. Как известно, она состоит из кинетической энергии хаотического движения молекул и потенциальной энергии взаимодействия самих молекул и всех частиц, входящих в их состав.

В случае одноатомного идеального газа (когда взаимодействие молекул отсутствует) внутренняя энергия равна

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT.$$

Нетрудно оценить каким огромным запасом внутренней энергии обладает окружающая Землю атмосфера, масса которой равна примерно 10^{18} *кг.*

Еще бо́льшим запасом внутренней энергии обладают моря и океаны*). Масса воды в мировом океане составляет около 10^{21} *кг*. Охлаждение ее только на 1 градус привело бы к выделению энергии порядка 10^{24} *дж*. Это в 100 000 000 раз больше всей энергии, вырабатываемой на земном шаре за год!

Казалось бы, энергетические запасы на земном шаре почти безграничны. Однако внутреннюю энергию атмосферы и океанов не причисляют к энергетическим запасам. Это связано с особенностями использования этого вида энергии.

Для использования внутренней энергии тела нужно ее «отнять» у него. Это может быть осуществлено двумя способами — в процессе теплопередачи, когда тело отдает некоторое количество теплоты, или при совершении им работы.

Теплопередачей пользуются, например, в ряде технологических процессов, связанных с нагреванием тел, а также для обогрева помещений за счет внутренней энергии горячего пара или воды.

Но, как уже отмечалось, наибольшее значение имеет использование внутренней энергии тел для совершения механической работы.

Механическая работа совершается лишь тогда, когда происходит упорядоченное движение — перемещение тела. Внутренняя же энергия — это энергия беспорядочно (хаотически) движущихся молекул. Следовательно, для того чтобы за счет внутренней энергии совершалась работа, необходимо найти способ, позволяющий «преобразовать» хаотическое движение молекул в упорядоченное движение какого-либо макроскопического тела. А это задача не простая! Всякое упорядоченное движение тел в реальных условиях (при

*) Внутренняя энергия океана больше той, которая получается из приведенной выше формулы для внутренней энергии идеального газа, так как молекулы воды обладают еще и потенциальной энергией взаимодействия.

наличии трения) «преобразуется» в беспорядочное движение молекул (тела нагреваются). Обратное же преобразование хаотического движения молекул в упорядоченное требует специальных условий.

Такие условия могут быть созданы, например, при использовании цилиндра с поршнем. Беспорядочное движение молекул газа в цилиндре вызывает перемещение поршня. Цилиндр с поршнем составляет главную часть огнестрельного оружия. За счет внутренней энергии газов, возникающих при сгорании пороха в стволе (цилиндр), совершается механическая работа по перемещению снаряда (поршень).

Огнестрельное оружие, таким образом, является своеобразным тепловым двигателем. Но это не двигатель непрерывного действия, который необходим для того, чтобы приводить в движение станки, генераторы на электростанциях, транспорт и т. д.

Для того чтобы двигатели работали непрерывно, необходимо, чтобы поршень после расширения газа возвращался каждый раз в исходное положение, и газ вновь мог расширяться. А для этого внешняя сила должна совершать работу по сжатию газа в цилиндре. Если работа по сжатию, которая совершается внешней силой, равна работе, совершаемой газом при расширении, то коэффициент полезного действия такого двигателя, очевидно, равен нулю. Необходимо, чтобы работа сжатия была меньше работы расширения газа.

Как известно, элементарная работа, совершаемая при изменении объема газа от значения V_i до значения $V_i + \Delta V_i$, равна

$$A_i = p_i \Delta V_i.$$

Поэтому ясно, что для того чтобы работа внешней силы при сжатии газа была меньше работы, совершаемой газом при расширении, необходимо, чтобы каждому значению объема газа при сжатии соответствовало меньшее давление, чем при расширении. Как известно, давление газа при одном и том же объеме тем меньше, чем ниже его температура. Значит, газ перед сжатием должен быть охлажден.

Казалось бы, охладить газ — задача простая. Например, можно для этого привести его в контакт с телами более низкой температуры. Но в этом случае энергия хаотического движения молекул газа преобразуется в энергию также хаотического движения других тел, и для совершения работы она будет потеряна. Вот почему первые тепловые двигатели, в которых использовался этот способ охлаждения пара перед его сжатием, имели чрезвычайно низкий коэффициент полезного действия — до 5%. Очевидно, нужно было найти другой способ охлаждения газа.

Так потребности техники поставили перед наукой задачу исследовать работу тепловых двигателей и найти способы повышения эффективности их работы.

Процесс расширения газа

Итак, внутренняя энергия, отнятая у нагретого тела при соприкосновении его с более холодным телом, совершенно бесполезна для совершения работы. Она лишь увеличивает энергию хаотического движения молекул холодного тела.

Поэтому, если мы хотим получить максимальную работу при расширении газа, надо, *чтобы газ в этом процессе не соприкасался с телами, имеющими более низкую температуру*.

Исключить контакт рабочего тела с более холодными телами можно двумя способами: поместить газ в сосуд, стенки которого сделаны из теплоизолирующего материала, или поддерживать постоянный контакт газа с телами, имеющими ту же температуру, что и он сам. Рассмотрим оба способа.

Адиабатный процесс

Представим себе, что сжатый газ находится в цилиндре с подвижным поршнем (рис. 1). Цилиндр и поршень сделаны из идеального теплоизолирующего материала. В этих условиях газ будет расширяться и совершать некоторую работу A без передачи тепла в окружающую среду ($Q = 0$). Такой процесс, при котором теплопередача исключена, называется адиабатным *).

Из первого закона термодинамики

$$Q = \Delta U + A^{**})$$

следует, что в адиабатном процессе

$$\Delta U = -A.$$

При расширении газа силы, с которыми он действует на поршень, совершают положительную работу ($A>0$), поэтому внутренняя энергия газа уменьшается ($\Delta U < 0$).

Мы видим, что при адиабатном расширении газа его внутренняя энергия уменьшается как раз на величину совершенной работы, то есть газ совершает максимальную работу, равную уменьшению его внутренней энергии. При этом происходит понижение температуры. Легко догадаться, что при адиабатном сжатии газа его внутренняя энергия увеличивается за счет работы, совершенной над газом другими телами.

Итак, при адиабатном сжатии газ нагревается, а при расширении охлаждается. Вспомните, например, опыт с воспламенением ватки, смоченной эфиром, при резком сжатии паров эфира в цилиндре. Охлаждением воздуха и водяных паров, содержащихся в нем, при адиабатном расширении объясняется образование облаков. Нагретый у поверхности Земли воздух при быстром подъеме в верхние слои атмосферы, где давление ниже, расширяется почти адиабатно и при этом охлаждается. Водяные пары в нем конденсируются в мелкие капли и кристаллики, образуя облака.

*) Адиабатный процесс может происходить и в том случае, когда газ не находится в теплоизолирующей оболочке, но расширяется или сжимается так быстро, что теплопередача не успевает происходить.

**) Напомним, что Q — количество теплоты, полученное системой, ΔU — изменение ее внутренней энергии, A — работа, совершенная силами системы над внешними телами.

Изотермический процесс

Рассмотрим другой способ расширения газа.

Представим себе снова, что сжатый газ находится в цилиндре с поршнем (рис. 2). Цилиндр соприкасается теплопроводящим дном только с телом такой же как у него температуры (источник энергии), которая поддерживается постоянной. Предоставим газу возможность расширяться и совершать работу. Так как работа совершается газом за счет внутренней энергии, его температура начнет понижаться. Но тогда температура источника окажется выше, чем температура газа, и тотчас же от источника к газу будет передаваться такое количество теплоты, которое сравняет его температуру с температурой источника. Отдавать же какое-либо количество теплоты газ не может, так как он не соприкасается с телами более низкой температуры. Таким образом, температура газа будет оставаться практически все время постоянной. Процесс, происходящий при неизменной температуре, называется изотермическим.

Внутренняя энергия идеального газа пропорциональна его температуре, а значит, изменение внутренней энергии пропорционально изменению температуры. Следовательно, в изо-

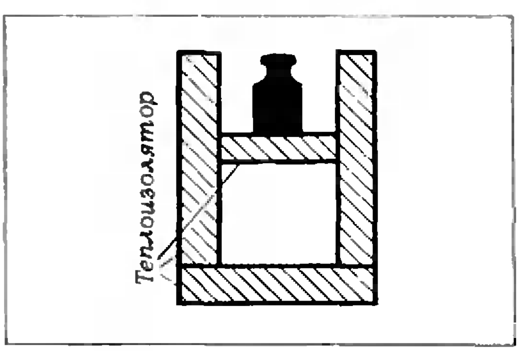


Рис. 1.

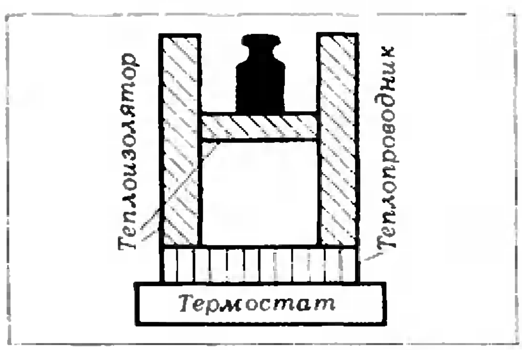


Рис. 2.

термическом процессе внутренняя энергия газа не меняется ($\Delta U = 0$). Тогда из первого закона термодинамики следует, что

$$Q = A,$$

то есть при изотермическом расширении количество теплоты, полученное газом от источника энергии, равно совершенной работе.

Кроме рассмотренных, возможны самые различные процессы расширения газа. Но *в адиабатном и изотермическом процессах наиболее полно используется внутренняя энергия для совершения работы. В этих процессах газ отдает энергию телам только при совершении работы.* В адиабатном процессе газ совершает работу за счет своей внутренней энергии, и эта энергия уменьшается. В изотермическом процессе газ совершает работу за счет внутренней энергии другого тела (источника энергии), от которого он получает некоторое количество теплоты.

Циклические процессы

До сих пор мы рассматривали лишь однократные процессы расширения газа, которые прекращаются, когда давление газа становится равным внешнему. Но для непрерывной работы двигателя необходимо, чтобы процесс расширения газа повторялся периодически. А для этого надо, чтобы после расширения газ снова был сжат, чтобы поршень вернулся в исходное положение и газ мог снова расширяться. Процессы, при которых рабочее тело периодически возвращается в начальное состояние, называют циклическими. Так что непрерывная работа теплового двигателя состоит из повторяющихся циклов.

Из каких процессов должен состоять цикл, чтобы к. п. д. двигателя был максимальным? Очевидно, он должен состоять из таких процессов, которые дадут возможность совершать максимальную работу за счет количества теплоты, полученного от источника энергии, и внутренней энергии рабочего тела. Такими процессами являются, как было выяснено, изотермический и адиабатный. Поэтому при расширении и сжатии газа должны быть использованы именно эти процессы, так как только они позволяют исключить контакт горячего тела с холодным, то есть исключить уменьшение энергии без совершения работы.

Сади Карно (1796—1832).

Впервые такой наиболее совершенный циклический процесс был предложен замечательным французским физиком и инженером Сади Карно в 1824 г.

Карно прожил короткую жизнь — всего 36 лет, но оставил яркий след в науке. В своем труде «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», обессмертившем его имя, он заложил основы теории тепловых машин. По существу он был основоположником науки о тепловых явлениях — термодинамики.

Сади Карно искал пути решения актуальной для его времени задачи — установить причины несовершенства тепловых машин и найти пути наиболее эффективного их использования.

Его труды — наиболее яркий пример в истории физики взаимного влияния науки и техники.

Цикл Карно

Допустим, что сжатый газ, имеющий температуру источника энергии T_1

(температура нагревателя), находится в цилиндре, стенки и поршень которого сделаны из теплоизоляционного материала, а дно — из материала с высокой теплопроводностью. Объем, занимаемый газом, равен V_1.

Приведем цилиндр в контакт с нагревателем. Предоставим газу возможность изотермически расширяться и совершать работу. Газ получает при этом от нагревателя некоторое количество теплоты Q. Этот процесс графически изображается изотермой (кривая ab на рисунке 3, *а*).

Далее газ должен быть сжат, но, как уже было выяснено, при более низкой температуре, то есть изотерма сжатия должна быть ниже изотермы расширения. Ведь только в этом случае работа сжатия будет меньше работы расширения. Но мы помним, что газ не следует охлаждать соприкосновением с более холодным телом, чтобы исключить теплопередачу без совершения работы. Сади Карно писал: «В телах, употребляемых для развития движущей силы тепла, не должно быть ни одного изменения температуры, происходящего не от изменения объема». Другими словами, температура рабочего тела не должна изменяться без совершения телами работы. Значит, остается единственная возможность — охлаждать газ, предоставив ему возможность расширяться адиабатно.

Поэтому изотермический процесс расширения не доводят до конца хода поршня в цилиндре. Когда объем газа становится равным некоторому значению V_1', дно цилиндра изолируют от нагревателя; после этого газ расширяется адиабатно до объема V_2, соответствующего максимально возможному ходу поршня в цилиндре (адиабата bc на рисунке 3, *б*). При этом газ охлаждается до температуры T_2.

Теперь охлажденный газ можно изотермически сжимать при температуре T_2. Для этого его нужно привести в контакт с телом, имеющим ту же температуру T_2 (холодильник), и сжимать газ внешней силой. Однако в этом процессе газ никогда не вернется в первоначальное состояние — температура его T_2 будет все время меньше, чем T_1.

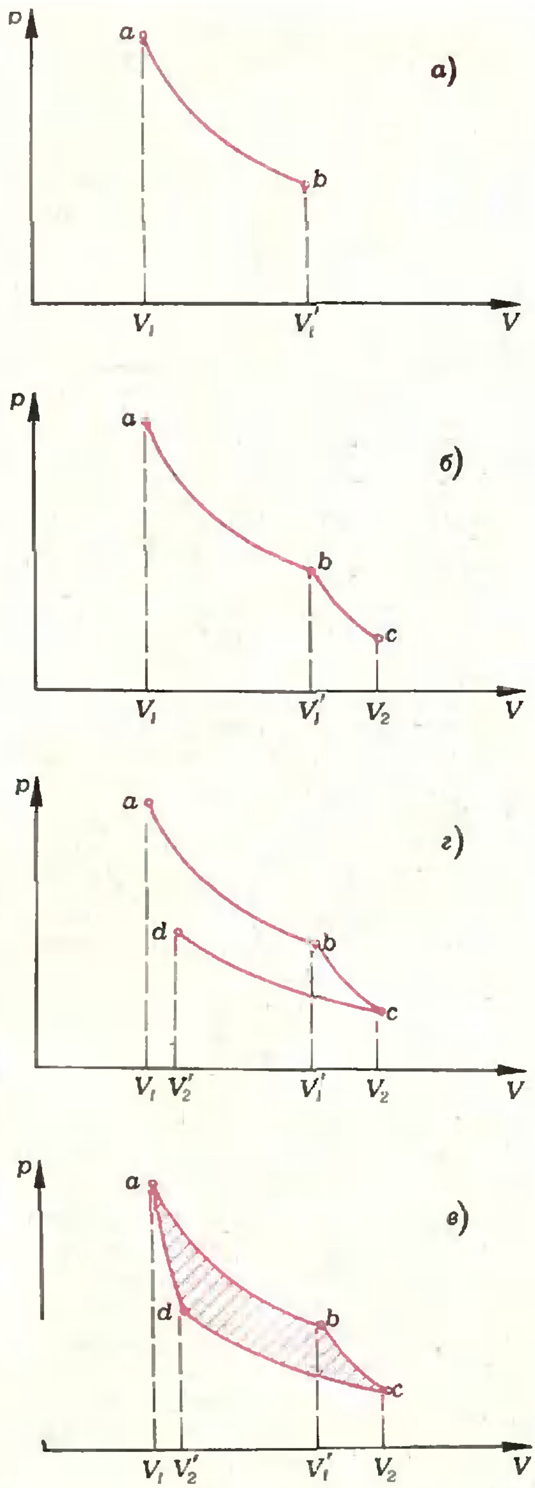


Рис. 3.

Поэтому изотермическое сжатие доводят до некоторого промежуточного объема V_2' (изотерма cd на рисунке 3, *в*). При этом газ отдает холодильнику некоторое количество теплоты Q_2, равное совершаемой над ним работе сжатия. После этого газ сжимают адиабатно до объема V_1, чтобы его температура вновь повысилась до T_1 (адиабата da на рисунке 3, $г$). Теперь газ вернулся полностью в первоначальное состояние, при котором объем его равен V_1, температура — T_1, давление — p_1, и цикл можно повторять вновь.

Итак, на участке abc газ совершает работу ($A > 0$), а на участке cda работа совершается над газом ($A<0$). На участках bc и da совершение работы происходит только за счет изменения внутренней энергии газа. Поскольку $\Delta U_{bc} = -\Delta U_{da}$, то и $A_{bc} = -A_{da}$. Так что полная работа, совершаемая за цикл, определяется разностью работ, совершаемых на участках ab и cd. Численно эта работа равна площади фигуры, ограниченной кривой цикла $abcd$ (рис. 3, $г$).

На участке ab газ получает некоторое количество теплоты Q_1 от нагревателя с температурой T_1, а на участке cd газ непременно отдает при сжатии количество теплоты Q_2 холодильнику с температурой T_2. Значит, в полезную работу фактически преобразуется только часть количества теплоты Q_1, полученной от нагревателя, равная $Q_1 - Q_2$. Поэтому к. п. д. цикла равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Если же газ не охлаждать перед сжатием и, следовательно, не отдавать некоторое количество теплоты более холодному телу, то полезная работа за цикл будет равна нулю. В этом состоит особенность совершения механической работы тепловыми двигателями: невозможно все количество теплоты, полученное от нагревателя, преобразовать полностью в работу при циклическом процессе. Неизбежно приходится какую-то часть этого количества теплоты отдавать третьему телу с более низкой температурой. Значит, для работы тепловых машин недостаточно иметь только источник энергии (нагреватель) и рабочее тело. Необходимо иметь еще третье тело с более низкой температурой (холодильник). Таким холодильником часто служит окружающая атмосфера. Для непрерывной работы любого теплового двигателя необходимо иметь *нагреватель, рабочее тело и холодильник.*

Итак, цикл Карно был на всех стадиях проведен таким образом, что нигде не было соприкосновения тел с различными температурами. Это исключало возможность теплопередачи без совершения работы, то есть исключало переход беспорядочного движения молекул одного тела в беспорядочное движение молекул других тел.

Как показал Сади Карно, коэффициент полезного действия идеального цикла может быть выражен через температуры нагревателя (T_1) и холодильника (T_2):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

или

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (*)$$

В реальных двигателях не удается осуществить цикл, состоящий из идеальных изотерм и адиабат. Дело в том, что процессы в двигателях проходят достаточно быстро, и изотермичность процессов нарушается — понижение температуры в результате элементарного расширения «не успевает» скомпенсироваться повышением температуры за счет контакта с нагревателем. Материалы, из которых изготавливаются стенки цилиндра и поршень, не могут быть идеальными изоляторами, как это необходимо для осуществления адиабатного процесса. Поэтому к. п. д. цикла, осуществляемого в реальных двигателях, всегда меньше, чем к. п. д. цикла Карно (при одних и тех же температурах нагревателей и холодильников).

Вместе с тем рассмотрение идеального цикла Карно имеет огромное значение, так как оно указывает пути повышения к. п. д. тепловых двигателей. Из формулы (*) видно, что к. п. д. двигателей тем больше, чем выше температура нагревателя и чем ниже температура холодильника.

В современных двигателях обычно к. п. д. увеличивают за счет повышения температуры нагревателя. В мощных паровых турбинах в настоящее время используют пар, температура которого достигает 600°С. В газовых турбинах температура газа достигает 900°С. Дальнейшее повышение температуры нагревателя ограничивается жаростойкостью материалов, имеющихся в настоящее время.

Ограничения, накладываемые на полное использование внутренней энергии для совершения механической работы в тепловых двигателях, не вытекают из первого закона термодинамики. Этот закон «запрещает» лишь получение работы большей, чем затраченная энергия. Но если бы энергия нагревателя уменьшилась, например, на 100 джоулей, и при этом тепловой двигатель совершил работу 100 джоулей, то это не противоречило бы первому закону термодинамики. Однако, как было выяснено, *невозможен такой циклический процесс, при котором все количество теплоты, полученное от нагревателя, идет на совершение работы.* Неизбежно некоторая часть этого количества теплоты отдается другим телам с более низкой температурой.

Указанные выше ограничения на совершение непрерывной работы в циклических процессах за счет внутренней энергии составляют содержание другого важнейшего закона природы — второго закона термодинамики.

Особенность использования внутренней энергии позволяет понять, почему некоторые источники энергии, находящиеся вокруг нас, бесполезны. Очевидно, не может быть использована энергия таких тел, температура которых равна температуре окружающей среды.

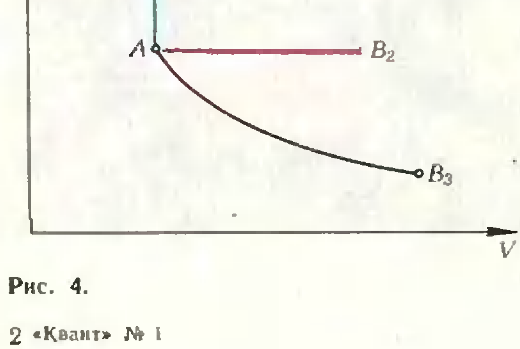


Рис. 4.

Насколько заманчивым казалось бы использование почти безграничного запаса внутренней энергии, которая содержится в атмосфере и водах океанов! Однако для получения работы за счет этой энергии необходимо иметь столь же гигантский холодильник, который принимал бы часть этого огромного количества теплоты и при этом не нагревался сам до температуры океана. Именно поэтому, как уже указывалось, энергию океанов не причисляют к энергетическим запасам на земном шаре.

Однако в настоящее время высказываются предположения о возможности использования разности температур в глубинных и поверхностных слоях морей и океанов, хотя это и связано с огромными техническими трудностями.

Упражнения

1. Чему равно изменение внутренней энергии киломоля идеального газа при его охлаждении на 20 градусов?

2. Какая энергия выделилась бы при охлаждении на 1 градус всей массы воздуха, окружающего земной шар? Удельная теплоемкость воздуха $c=10^3$ *дж/кг·град.*

3. Постройте график изотермического процесса по данным таблицы:

V, *л*	10	15	20	30	40	50	60
p, *атм*	60	40	30	20	15	12,5	10

Пользуясь этим графиком, определите работу газа при изменении его объема от 20 до 40 *л*.

4. На графике (рис. 4) изображены различные процессы изменения состояния газа: AB_1, AB_2, AB_3. При переходе из первого состояния (A) в одно из последующих (B_1, B_2 или B_3) газ получает некоторое количество теплоты. Совершает ли газ работу и изменяется ли его внутренняя энергия в каждом из этих процессов?

5. Восходящий от поверхности Земли поток воздуха представляет собой своеобразный тепловой двигатель. Укажите в нем основные части, присущие любому тепловому двигателю.

В. Майер, Р.-Э. Шафир

Струйный автогенератор звука

Для проведения описанного ниже опыта вам понадобится, прежде всего, стеклянная трубка с небольшим отверстием. Конечно, вы можете воспользоваться обыкновенной стеклянной пипеткой, но нетрудно и самим изготовить нужную трубку.

На пламени сухого горючего или газовой горелки растяните легкоплавкую стеклянную трубку диаметром 4—6 *мм* так, чтобы образовавшаяся перетяжка имела внутренний диаметр около 1 *мм*. Ребром напильника или надфиля аккуратно надпилите трубку посередине перетяжки и затем разломите ее. У вас получится две трубки с оттянутыми, как у пипетки, концами. Можете сделать и по-другому. Введите конец трубки в пламя и равномерно вращайте трубку так, чтобы конец ее стал оплавляться, а отверстие — затягиваться расплавленным стеклом. Когда внутренний диаметр оплавленного конца трубки станет равным примерно 1 *мм*, трубку удалите из пламени и остудите.

Изготовленную стеклянную трубку вставьте в отверстие резиновой пробки, а пробку вденьте в резиновый шланг подходящего диаметра (рис. 1). Шланг соедините с краном водопровода и пустите по нему воду. При этом из отверстия стеклянной трубки будет бить тонкая водяная струя, в которой можно выделить две области. Ближайшая к отверстию часть струи совершенно прозрачна и выглядит неподвижной, ниже струя становится неспокойной и мутной. Очевидно, сначала жидкость движется сплошным потоком, затем поток разбивается на отдельные капли, которые падают обособленно друг от друга, но при этом движутся настолько быстро, что воспринимаются как целостная мутная струя. Верхняя часть струи прозрачна, поскольку свет преломляется на геометрически правильной поверхности струи. В нижней части струи свет рассеивается на отдельных каплях, и вода выглядит мутной.

На рисунке 2 приведена фотография струи, бьющей под углом к горизонту. На фотографии хорошо видны оба участка струи.

В том, что мутная область струи — это поток отдельных капель, можно убедиться и на слух. Введите в струю вверх дном пустую консервную банку. Если дно находится в прозрачном участке струи, вода падает на него почти бесшумно. Опуская банку вниз, вы заметите, что появляется звук, сначала слабый, потом постепенно усиливающийся. Происхождение этого звука и объясняется ударами о дно отдельных капель воды.

Теперь приступайте непосредственно к опыту. Возьмите пустую консервную банку и затяните ее отверстие резиновой пленкой от детского надувного шарика. Введите банку в струю так, чтобы пленка оказалась в сплошном участке струи вблизи места распадания ее на капли (оптимальное положение банки нетрудно подобрать экспериментально). Пользуясь стеклянной палочкой или медной про-

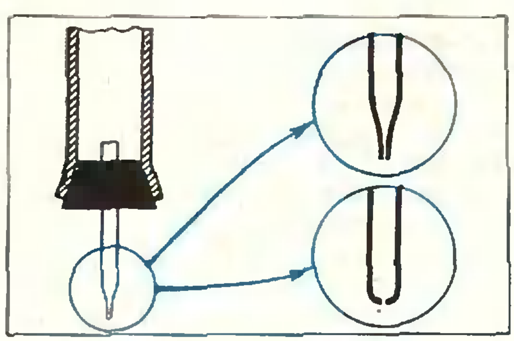


Рис. 1.

волокой диаметром 1,5—2 *мм*, соедините между собой резиновую пленку и стеклянную трубку, из которой выходит струя (рис. 3). Участок струи вблизи пленки немедленно становится мутным, и возникает громкий почти однотонный звук. Звук продолжается все время, в течение которого банка и стеклянная трубка механически соединены. Стоит разорвать связь между этими элементами, и звук исчезает.

Попробуем объяснить результат опыта. Появление звука свидетельствует о том, что в системе возникли незатухающие механические колебания, причем без действия внешней периодически изменяющейся силы. Такие системы называют автоколебательными. Они, как правило, включают в себя (кроме самой колебательной системы) источник энергии и так называемое звено обратной связи, посредством которого колебательная система сама (автоматически) управляет поступлением энергии из источника. Возможно, вы уже встречались с колебательными системами. Это, например, маятниковые часы и ламповый генератор электромагнитных колебаний.

Источником энергии в описанном опыте является поток воды, падающий на резиновую пленку. Колебательную систему представляет собой банка, отверстие которой затянуто резиновой пленкой. В этом нетрудно убедиться: удалите банку из струи и резко ударьте по резиновой пленке пальцем — вы услышите быстро затухающий звук примерно той же частоты, которую раньше давала система. Обратную связь, по-видимому, обеспечивает стеклянная палочка, которая механически связывает между собой колебательную систему и источник энергии.

Рис. 2.

Рис. 3.

Процесс установления колебаний в нашей автоколебательной системе — будем называть ее струйным автогенератором звука — можно представить себе так. Струя, падая на резиновую пленку, в силу чисто случайных причин вызывает слабые быстро затухающие звуковые колебания воздуха в банке. Эти колебания по стеклянной палочке передаются трубке, из которой вытекает струя (звук прекрасно распространяется в твердых телах!). Струя каким-то образом реагирует на звуковые колебания и передает их опять резиновой пленке. Объем воздуха в банке резонирует, колебания усиливаются и частично вновь передаются стеклянной трубке, из которой выходит струя. Далее процесс повторяется до тех пор, пока амплитуда звуковых колебаний не возрастет настолько, что потери энергии будут компенсироваться поступлениями ее из источника. В результате устанавливаются незатухающие автоколебания.

Объясняя работу струйного автогенератора звука, мы предположили, что струя реагирует на звук. Действительно ли звуковые волны воздействуют на струю? В чем выражается это воздействие? Каков его механизм? Попытайтесь ответить на эти вопросы самостоятельно.

Вопреки распространенному заблуждению, значительная часть деятельности математика (или физика-теоретика) является экспериментальной. Прежде чем что бы то ни было доказать, математик тратит много времени на то, чтобы, рассматривая разнообразные примеры и частные случаи, освоиться с новыми объектами и отыскать закономерности, которые затем удастся представить в виде «правильной задачи» или «теоремы». Только после этой большой работы, исписав горы бумаги конкретными вычислениями или исчертив ее графиками, математик принимается за решение абстрактной математической задачи или за доказательство теоремы. Многие важные для практических приложений результаты математической науки также представляют собой не абстрактные теоремы, а таблицы для расчетов, графики, схемы, программы для вычислений.

Этой «экспериментальной» части математики и посвящен наш новый раздел «Математический практикум». Выполняя задания «Математического практикума», вы научитесь по нескольким частным наблюдениям находить общие закономерности, сможете, если тема задания вам понравится, разобраться в ней глубже и, возможно, сделаете первые самостоятельные открытия. Как правило, наши задания по математическому практикуму будут состоять из двух или нескольких ступеней: первая — проделать «эксперимент» (нарисовать несколько кривых или фигур, решить серию уравнений и т. п.), следующие — сформулировать общую задачу, написать общее уравнение изучаемого явления или процесса, одним словом, провести некоторое исследование.

В каждом нашем задании мы приводим конкретный образец, которому нужно следовать и описываем план работы. Просим письма с выполненными заданиями присылать в редакцию с пометкой «Мат. практикум». Графики и чертежи выполняйте на стандартных листах бумаги. Просим при пересылке не сворачивать листы в трубку. В письмо вложите конверт с обратным адресом для ответа.

Большая часть заданий, которыми начинается этот отдел, родилась в стенах физико-математической школы при МГУ.

В первом задании математического практикума речь пойдет о некоторых кривых, рассматривавшихся в прошлом веке в связи с трудной (по тем временам) и важной технической проблемой: как связать поршень с точкой махового колеса двигателя таким образом, чтобы вращение колеса сообщало поршню прямолинейное движение?

В. Вавилов

Шарнирные механизмы. Кривые Уатта

«Хоть я и не особенно забочусь о славе, однако параллелограммом горжусь больше, чем каким-либо другим изобретением, сделанным мною».

Дж. Уатт (из письма к сыну)

1. Шарнирный механизм, изображенный на рисунке 1, был предложен Джемсом Уаттом в 1774 году *), когда он решал такую проблему: как связать поршень с точкой махового колеса, чтобы вращение колеса сообщало поршню прямолинейное движение? На рисунке 1 изображен так называемый сокращенный параллелограмм Уатта: он состоит из двух стержней O_1A_1 и O_2A_2 одинаковой длины (коромысла и отводного радиуса), соединенных между собой при помощи шарниров стержнем A_1A_2 (шатуном). Стержни O_1A_1 и O_2A_2 вращаются вокруг закрепленных точек O_1 и O_2, и, если позволяют длины стержней, можно получить целый ряд различных «крестообразных» фигур (рис. 2, *а*, *б*).

*) Джемс Уатт (1736—1819) — выдающийся английский изобретатель. Работая механиком университета в Глазго, занимался усовершенствованием паровых двигателей.

Тщательно исследовав движение точек M шатуна A_1A_2, Уатт убедился, что *средняя точка шатуна A_1A_2 незначительно уклоняется от прямой линии, когда вся система в целом приходит в движение* (рис. 3).

Трехзвенник $O_1A_1A_2O_2$ обладал одним недостатком: расстояние между точками O_1 и O_2 (между осями вращений коромысла и отводного радиуса) должно было быть довольно значительным, чтобы пригодная часть траектории (то есть часть кривой, мало отличающаяся от прямой линии) движения средней точки шатуна была протяженной; это приводило к недопустимому увеличению размеров машинного отделения. Чтобы избежать этого, Уатт добавил **пантографическое расширение** к трехзвеннику, получив полный параллелограмм (рис. 3; $|O_1A_1| = |O_2A_2| = |B_2A_2| = |B_1A_1|$, $|B_1B_2| = |A_1A_2|$, $|MA_1| = |MA_2|$, стержень O_2B_2 в точке A_2 не изгибается), после чего сам механизм и стали называть *параллелограммом Уатта*. В силу подобия треугольников O_2A_2M и $O_2B_2B_1$ точки O_2, M и B_1 всегда лежат на одной прямой. На том же основании $|O_2B_1|$ вдвое больше $|O_2M|$; следовательно, точка B_1 описывает траекторию, гомотетичную траектории точки M, в удвоенном масштабе. На практике улучшение состояло в том, что поршень прикреплялся не в точке M трехзвенника $O_1A_1A_2O_2$, а в точке B_1 — вершине параллелограмма $A_1B_1B_2A_2$; таким образом, Уатту удалось размеры механизма полностью согласовать с размерами обычного машинного отделения.

На рисунке 3 изображена замкнутая кривая, которую описывает точка M (если движения трехзвенника не ограничивать); только дуга MN этой кривой может использоваться в машине.

Шарнирными механизмами много и плодотворно занимался замечательный русский ученый **Пафнутий Львович Чебышев** (1821—1894). К ним он проявлял особую склонность с малых лет. Ими он не переставал заниматься в течение всей своей жизни. Чебышев собственноручно изготовил много самых разнообразных шарнирных механизмов, среди них — лодка с гребным аппаратом, шагающий человек («стоходящая машина») и другие замечательные вещи.

П. Л. Чебышева интересовали главным образом те механизмы, которые наиболее точно могли воспроизводить прямолинейное движение. В частности, он выяснил, что в случае параллелограмма Уатта «самые хорошие» кривые получаются тогда, когда выполнено соотношение $(2|O_1A_1|)^2 + |A_1A_2|^2 = |O_1O_2|^2$, которое означает, что должно существовать такое состояние механизма,

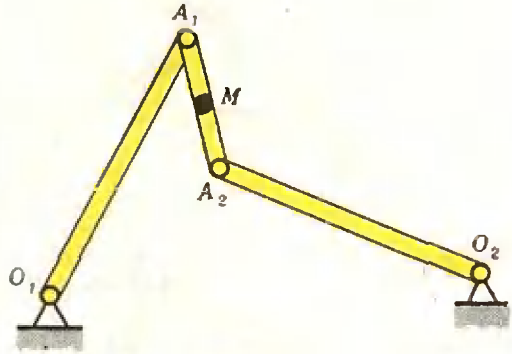


Рис. 1.

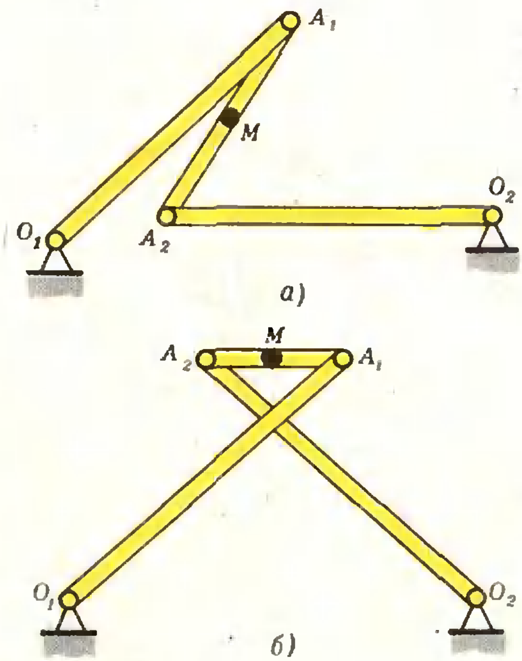


Рис. 2.

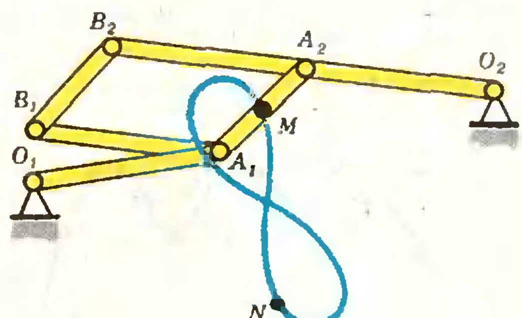


Рис. 3.

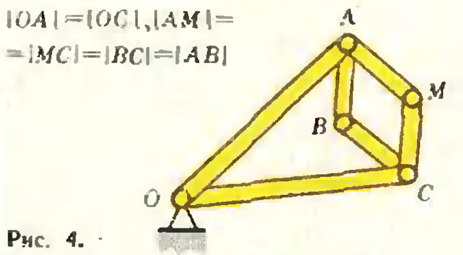


Рис. 4.

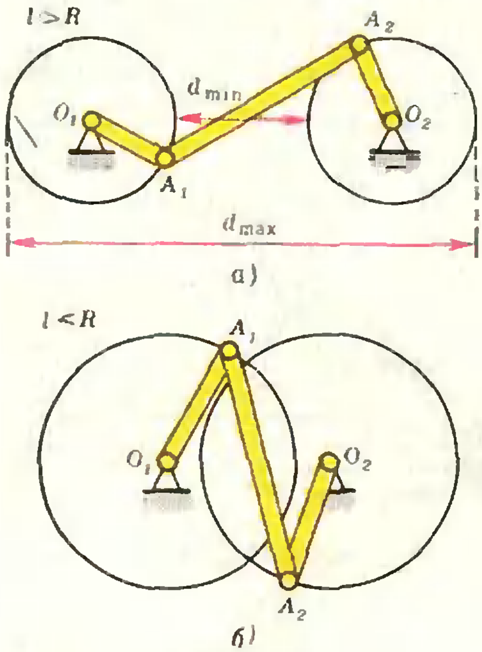


Рис. 5.

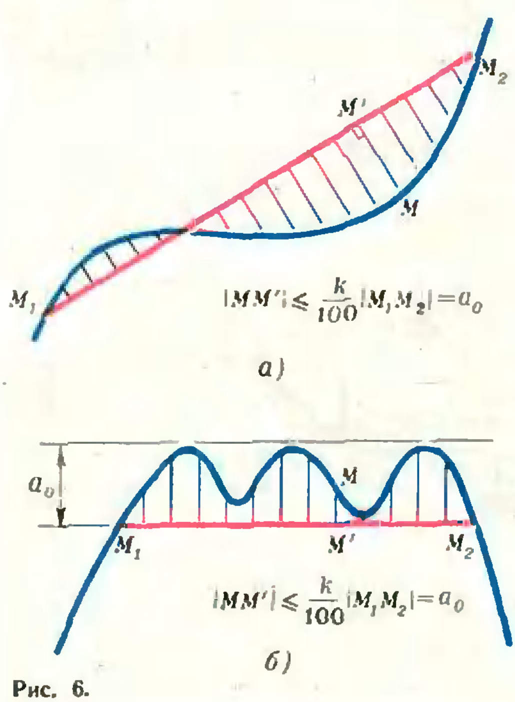


Рис. 6.

когда $[O_1A_1]\perp[A_1A_2]$ и $[O_2A_2]\perp$ $\perp[A_1A_2]$.

Задачу отыскания точного прямолинейно-направляющего механизма ему, однако, разрешить не удалось. В 1864 году французский офицер Поселье изобрел аппарат, названный *инверсором* (рис. 4), преобразовывающий вращательное движение в безукоризненное прямолинейное.

Задача (*трудная*). Докажите, что если точка B (см. рис. 4) описывает некоторую окружность, проходящую через точку O (этого можно добиться, добавив к инверсору седьмой стержень $O'B$ такой, что $|O'B|=$ $=|OO'|$, и точку O' закрепить), то точка M описывает прямую линию *).

Дальнейшие исследования показали, что с помощью шарнирных механизмов можно реализовать очень многие кривые.

Отметим особо, что при изучении параллелограммов Уатта перед Чебышевым возникла следующая математическая задача: при каких соотношениях длин стержней механизма Уатта функция, описывающая движение средней точки шатуна, наименее всего отклоняется на заданном промежутке **) от линейной функции. Такая постановка вопроса послужила толчком к многочисленным теоретическим исследованиям и созданию современной конструктивной теории функций.

2. Мы предлагаем вам проследить за траекторией движения точек M отрезка A_1A_2 (или неразрывно связанных с ним, см. ниже п. 3); эти траектории называются *кривыми Уатта*. Ограничиваясь рассмотрением только симметрического случая ($|MA_1|=$ $=|MA_2|$), положим

$$|O_1O_2|=2l,\ |A_1A_2|=2d,$$
$$|O_1A_1|=|O_2A_2|=R.$$

---

*) См. «Квант», 1971, № 8, с. 27—28.

**) До Чебышева участок кривой MN (см. рис. 3) сравнивали с касательной к этой кривой, проведенной в центральной точке. Если же нужно достигнуть хорошего приближения «между данными пределами» (в нашем примере — между точками M и N), то касательной следует предпочесть некоторую другую прямую, «лучше» представляющую дугу MN, чем соответствующий отрезок касательной.

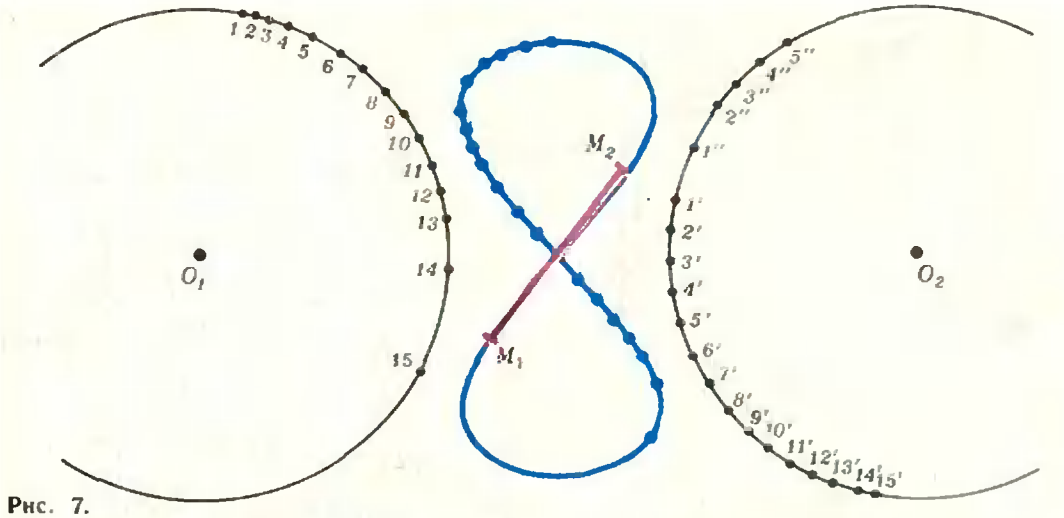


Рис. 7.

Точки A_1 и A_2 могут перемещаться по окружностям радиуса R с центрами O_1 и O_2. Заметим, что наибольшее возможное значение расстояния $|A_1A_2|$ равно $2(l+R)$ (рис. 5,а), а наименьшее — $2(l-R)$ (при $l \geqslant R$) или 0 (при $l \leqslant R$) (рис. 5, а, б). Отсюда следует, что для существования механизма Уатта необходимо, чтобы параметры d, R и l удовлетворяли неравенствам

$$l - R \leqslant d \leqslant l + R.$$

Мы будем говорить, что *участок M_1M_2 кривой отличается от отрезка прямой $[M_1M_2]$ не более, чем на k%*, если каждая точка M этого участка кривой удалена от отрезка M_1M_2 на расстояние, не превосходящее величину $a_0 = \frac{k}{100}|M_1M_2|$ (имеется в виду длина перпендикуляра из точки M на отрезок M_1M_2; рис. 6).

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать задание математического практикума.

Задание

По параметрам d, R и l (см. таблицу) плоского шарнирного механизма Уатта:

а) начертите по точкам кривую Уатта, описываемую серединой шатуна;

б) на построенной траектории при помощи линейки определите длину наибольшего участка кривой, отличающегося от отрезка прямой менее чем на 5%.

Образец

$d = 3$; $R = 4$; $l = 5$ (рис. 7).

Замечание. Для самостоятельной работы возьмите один (или несколько) из наборов значений d, R, l из таблицы. Положение точки M нужно находить при помощи циркуля и линейки: поставив одну ножку циркуля с раствором $2d$ в некоторую точку P окружности с центром в точке O_1 радиуса R, искать другой ножкой точку Q на второй окружности (с центром O_2 радиуса R); середина отрезка $[PQ]$ определяется при помощи линейки. Число точек P, которое нужно взять для более или менее точного построения искомой траектории, равно 15; при вычерчивании кривой по построенным точкам нужно помнить о ее симметрии.

После того как вы построите кривую, попробуйте ответить на несколько вопросов.

1°. На готовом чертеже покажите «полный цикл работы» механизма (т. е. то, как перемещается шатун, когда его середина движется по кривой Уатта).

2°. Сколько у данного механизма существует положений, из которых можно начать движение более чем двумя способами?

Таблица

d	4	4	1	1	2	1	1	4	13	3	2	4
R	3	8	6	5	3	2	3	3	12	4	3	7
l	5	5	5	2	2	1	1	2	5	2	1	2

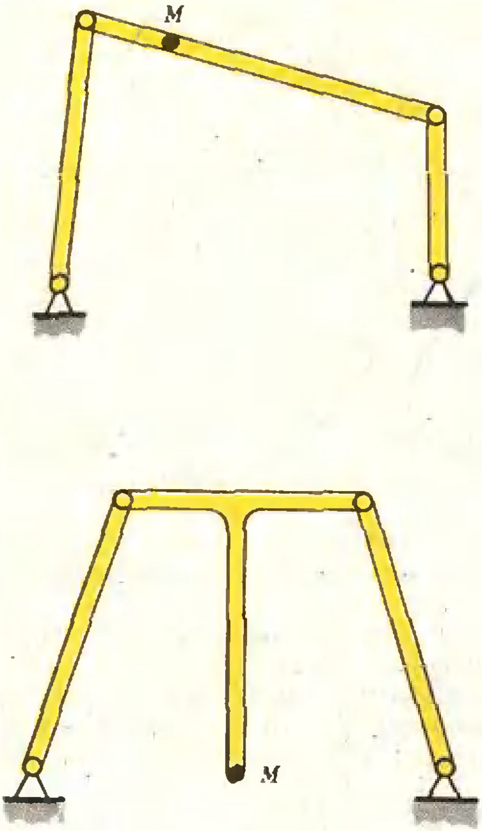


Рис. 8.

3°. Если построенную кривую нужно «повернуть» на 90°, то в каких точках O_1 и O_2 плоскости мы должны закрепить механизм?

4°. Прикиньте «на глаз» на чертеже, какой вид будет иметь кривая Уатта, если $3|MA_1| = |MA_2|$.

5°. Какой участок построенной кривой точка M проходит быстрее (медленнее) всего? Как это можно доказать?

3. Данное задание может стать началом (мы надеемся, что так и будет) *настоящего математического исследования* (теоретического). Вот его возможная программа:

а) найти уравнение кривой Уатта (в декартовых и полярных координатах);

б) определить все возможные типы кривых Уатта в симметрическом случае. Под типом кривой мы понимаем ее форму. Оказывается, что различных траекторий существует только 12 (соответствующие им значения параметров отражены в таблице).

в) какие типы кривых можно получить при помощи механизмов, показанных на рисунке 8?

Спиши и думай

Каждая буква здесь обозначает определенную цифру. Суммы чисел по любым вертикалям, горизонталям и диагоналям квадрата одинаковы. Восстановите запись чисел в клетках квадрата.

Л. Мочалов

Ребус

one
one
\+ one
one
———
four

four
\+ one
———
five

В двух примерах на сложение одинаковые цифры были заменены одинаковыми буквами, то, что получилось, изображено на рисунке. Попробуйте расшифровать примеры.

В. Акулич,
И. Акулич

Лемниската Бернулли

На первой и четвертой страницах обложки изображены похожие кривые. На четвертой — *лемнискатоиды*, или *кривые Уатта* (о них рассказывает статья В. Вавилова в этом номере — с. 20). На первой — *лемниската Бернулли* *). При определенном соотношении параметров, задающих лемнискатоиду ($l = d = R\sqrt{2}$ в обозначениях статьи Вавилова), она распадается на лемнискату Бернулли и окружность.

Лемниската Бернулли — замечательная кривая, привлекавшая внимание многих математиков. Определить ее можно по-разному.

Например, *лемниската* Бернулли является множеством точек на плоскости, произведение расстояний каждой из которых от двух фиксированных точек F_1, F_2 равно $\left(\frac{|F_1F_2|}{2}\right)^2$.

*) Речь идет о Якобе Бернулли (1654—1705), выдающемся ученом-математике, авторе работ, относящихся, главным образом, к математическому анализу, геометрии и теории вероятностей. Семья Бернулли дала миру много выдающихся ученых, в том числе математиков. В истории науки ученых из этой семьи с одинаковыми именами называют как королей — Даниил I, Иоганн II, ... «Лемниската» — греческое слово; лемниската той в античной Греции называли ленточку, при помощи которой к голове победителя прикрепляли венок.

На первой странице обложки нарисована также знакомая вам гипербола, точнее, равносторонняя гипербола, асимптоты которой перпендикулярны). Если проделать преобразование инверсии (см. «Квант», 1971, № 8, с. 23) с центром в центре симметрии гиперболы относительно касающейся ее окружности, то гипербола перейдет в лемнискату.

Получить лемнискату с помощью этой же гиперболы можно и по-другому. Построим *все окружности, проходящие* через центр симметрии гиперболы, с центрами на этой гиперболе. Кривая, касающаяся всех этих окружностей, и есть лемниската (именно это построение и приведено на обложке).

Вот еще один способ построения лемнискаты. В два квадрата (рис. 1) вписывается по окружности. Проводятся всевозможные секущие через центр O и образуются всевозможные хорды окружностей LM'. Перенесем эти хорды по лучам, которым они принадлежат так, чтобы каждая точка L попадала в точку O. Тогда множество точек M образует лемнискату.

Можно построить лемнискату и с помощью чертежных инструментов. Для этого проведем некоторые дополнительные построения на рисунке 1. Проведем NF параллельно OM, а также AC (где C — центр окружности) и NM перпендикулярно OM (рис. 2). Поскольку $|OC| = \frac{1}{2}|OF|$, то и $|AC| = \frac{1}{2}|ED| = \frac{1}{2}|MN|$. Кроме того, $|LA| = \frac{1}{2}|LM'| = \frac{1}{2} \times |OM|$. Следовательно, треугольники LAC и OMN подобны. Длина отрезка $|ON| = 2|LC|$ = постоянна. На этом основан способ построения лемнискаты, показанный на рисунке 3. Здесь используются два угольника и окружность радиуса $|QF|$. Катет одного из угольников должен содержать отрезок NF. Точка M принадлежит лемнискате.

Постарайтесь доказать, что все описанные способы построения дают одну и ту же кривую.

В. Березин

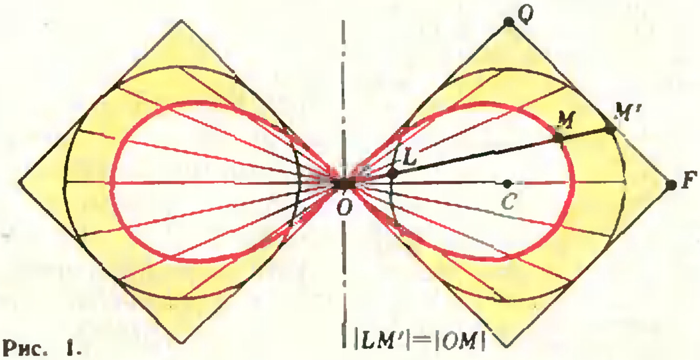


Рис. 1.

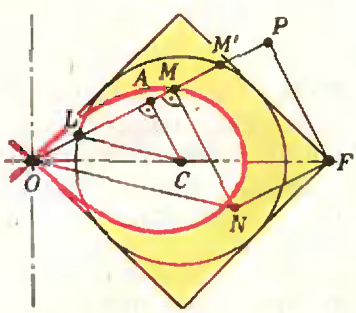


Рис. 2.

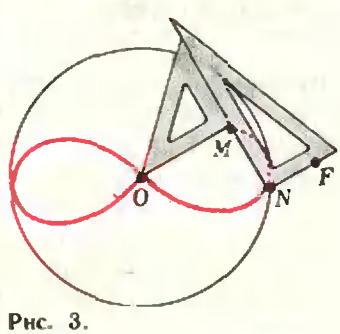


Рис. 3.

задачник Кванта

Задачи

М421 — М425; Ф433 — Ф437

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 марта 1977 года по адресу: 113035, Москва М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М421, М423» или «Ф434». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М421*. При каких натуральных m и n $(m<n)$ можно закрасить некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в черный цвет так, чтобы любой прямоугольник размера $m\times n$ содержал ровно одну черную клетку? Начните с более простой задачи: рассмотрите случаи $m=2$ и $n=3$, 4, 5 (рис. 1).

С. Охитин, ученик 10 класса

М422. Разбейте произвольный треугольник на семь равнобедренных треугольников, из которых три конгруэнтны между собой.

А. Хабелашвили

М423*. Докажите, что для любых действительных x, y и z выполнено неравенство

$$(x^2+y^2-z^2)(x^2+z^2-y^2)(y^2+z^2-x^2)\leqslant$$
$$\leqslant(x+y-z)^2(x+z-y)^2(y+z-x)^2.$$

Р. Шейнцвит

М424. Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, содержащая центр окружности, описанной около противоположной грани, и перпендикулярная противоположной грани. Докажите, что эти четыре плоскости пересекаются в одной точке.

А. Ягубьянц

М425*. Существует ли такое натуральное N, что каждое рациональное число между нулем и единицей представляется в виде суммы N чисел, обратных натуральным?

Ф433. Две одинаковые плоско-выпуклые линзы с фокусным расстоянием $F=20$ *см* каждая расположены на расстоянии 30 *см* друг от друга. Оптические оси линз совпадают, линзы обращены друг к другу плоскими сторонами. Где будет находиться изображение источника, находящегося на расстоянии 40 *см* от левой линзы, если пространство между линзами заполнить стеклом с показателем преломления таким же, как у линз?

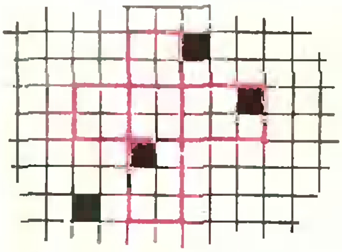


Рис. 1.

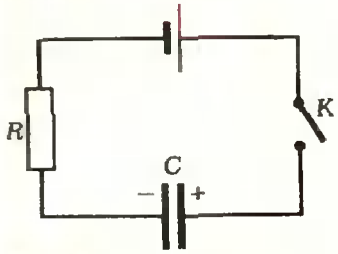


Рис. 2.

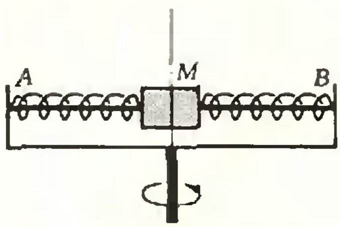


Рис. 3.

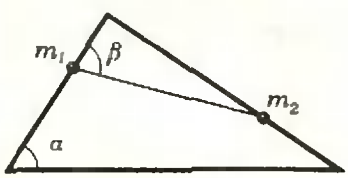


Рис. 4.

Ф434. Какое количество теплоты выделится на сопротивлении R при установлении равновесия после замыкания ключа K (рис. 2), если конденсатор был предварительно заряжен до разности потенциалов $2U$? Э. д. с. источника U, емкость конденсатора C. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

Ф435. В установке, показанной на рисунке 3, муфта M прикреплена к двум одинаковым пружинам, коэффициенты жесткости которых $k=10$ *н/м*. Муфта без трения может скользить по горизонтальному стержню AB. Установка вращается с постоянной угловой скоростью $\omega=4{,}4$ *рад/сек* вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Найти период малых колебаний муфты. Масса муфты $m=0{,}2$ *кг*.

При каком значении ω колебаний муфты не будет?

Ф436. Плотность газа, состоящего из смеси гелия и аргона, при давлении 152 *кн/м²* и температуре 27°С равна 2,00 *кг/м³*. Сколько атомов гелия содержится в 1 *см³* газовой смеси?

Ф437. Проволочная рамка, имеющая форму прямоугольного треугольника с углом $\alpha=30°$, помещена в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке 4. По проволоке могут без трения скользить связанные друг с другом нитью два грузика с массами $m_1=0{,}1$ *кг* и $m_2=0{,}3$ *кг*. Чему равно натяжение нити и угол β в положении равновесия грузиков? Является ли это равновесие устойчивым?

Решения задач

М379, М381 — М384; Ф387 — Ф392

М379. *На каждом из нескольких кусков бумаги произвольной формы поставлена клякса (произвольной формы). Назовем промокашку подходящей для данного куска, если ее можно разместить внутри этого куска так, что она закроет кляксу. Пусть набор промокашек, имеющих форму кругов разных радиусов, обладает таким свойством: для произвольных двух данных кусков найдется промокашка, подходящая для каждого из них. Докажите, что тогда в этом наборе найдется одна промокашка, подходящая для всех кусков.*

Рассмотрим один кусок бумаги. Пусть p и P — промокашки наименьшего и наибольшего радиусов, подходящие для данного куска.

Докажем, что круглая промокашка $П$ любого промежуточного радиуса — также подходящая для данного куска. (Заметим, что для промокашек другой формы, — например, для подобных прямоугольников — аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно.) Пусть круги p и P расположены на куске так, что каждый из них закрывает кляксу. Тогда круг $П$ можно расположить так, что он будет содержаться в объединении и содержать пересечение p и P (рис. 1):

$$\text{клякса} \subset (p \cap P) \subset П \subset (p \cup P) \subset \text{кусок}.$$

Докажем теперь утверждение задачи. Поставим в соответствие каждому из данных n кусков отрезок $[r, R]$ числовой оси, где r и R — радиусы наименьшей и наибольшей подходящей для него промокашки. По условию, любые два отрезка имеют общую точку.

Пусть ρ — наибольший из левых концов этих отрезков; это число ρ, очевидно, не меньше левого конца любого от-

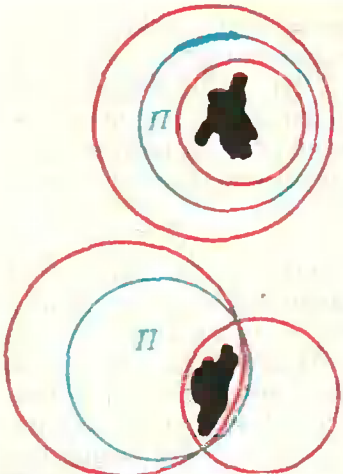


Рис. 1.

резка и не больше наименьшего правого конца, то есть ρ принадлежит всем n отрезкам.

Число ρ — радиус некоторой из наших промокашек. По доказанному, она будет подходящей для всех кусков.

В заключительной части решения мы использовали одномерный вариант теоремы Хелли для выпуклых фигур на плоскости: *если каждые три из n выпуклых фигур имеют общую точку, то и все n фигур имеют общую точку* — для выпуклых фигур на прямой, т. е. для отрезков, достаточно потребовать, чтобы любые два имели общую точку.

Н. Васильев

◆

Решение задачи М380 будет опубликовано в следующем номере нашего журнала.

◆

М381. *6 активистов класса образовали 30 различных комиссий. Каждые две комиссии отличаются составом, но обязательно «пересекаются», то есть имеют общего члена. Докажите, что можно образовать еще одну комиссию, пересекающуюся с каждой из этих 30 комиссий.*

Нетрудно показать, что у множества из n элементов ровно 2^n подмножеств. В частности, из шести активистов в принципе можно было бы составить 64 комиссии (включая сюда и «пустую» комиссию).

Разобьем все возможные 64 подмножества множества активистов на пары; в каждой паре — два непересекающихся подмножества A и $\bar{A}$, объединение которых есть все это множество (рис. 2). Поскольку пар 32, а комиссий — 30, то в какой-нибудь паре оба подмножества не пусты и не являются комиссиями. Рассмотрим одно из этих подмножеств A. Если оно пересекается со всеми 30 комиссиями, то задача решена. Если же оно с какой-нибудь комиссией B не пересекается, то второе подмножество из выбранной пары $\bar{A}$ содержит эту комиссию B, а раз B пересекается со всеми остальными комиссиями, то рассматриваемое подмножество $\bar{A} \supset B$ — тем более.

В заключение отметим, что больше, чем 32 комиссии, с соблюдением условий задачи составить вообще нельзя (докажите!).

С. Фомин

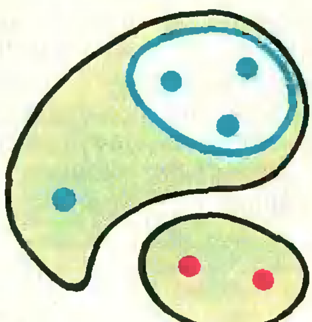


Рис. 2.

◆

М382. *Дан полином $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами и натуральные числа k и p. Докажите, что если ни одно из чисел $f(k)$, $f(k+1)$, ..., $f(k+p)$ не делится на $p+1$, то уравнение $f(x) = 0$ не имеет рациональных корней.*

Прежде всего заметим, что если уравнение $f(x) = 0$ имеет рациональный корень, то этот корень — целое число. В самом деле, пусть p/q, где p и q взаимно просты, — корень нашего уравнения. Тогда $p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \ldots + a_nq^n = 0$, откуда следует, что p не взаимно просто с q.

Предположим теперь, что у уравнения $f(x)$ есть целый корень $x_0 = m$, то есть $f(m) = 0$. Тогда по теореме Безу мы можем представить полином $f(x)$ в виде

$$f(x) = (x - m)\, g(x), \qquad (*)$$

где $g(x)$ — полином с целыми коэффициентами.

Подставив в соотношение (*) вместо x значения $k, k+1, \ldots, k+p$, получим

$$f(k) = (k - m)\, g(k),$$
$$f(k+1) = (k + 1 - m)\, g(k+1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(k+p) = (k + p - m)\, g(k+p).$$

Поскольку одно из $p + 1$ последовательных целых чисел $k - m$, $k + 1 - m$, $k + 2 - m$, ..., $k + p - m$ делится на $p + 1$, то и одно из чисел $f(k)$, $f(k+1)$, ..., $f(k+p)$ на $p + 1$ делится. Из этого следует, что полином, о котором говорится в задаче, не имеет целых корней.

Т. Райков

М383. *Пусть a и b — два натуральных числа. Докажите, что если ab четно, то найдутся такие натуральные числа c и d, что $a^2+b^2+c^2=d^2$, а если ab нечетно, то таких c и d найти нельзя.*

1). Пусть ab четно.

а) Если a и b *разной четности* (одно — четно, другое — нет), то a^2+b^2 нечетно: $a^2+b^2=2N+1$. Положим тогда $c=N$, $d=N+1$. Получим

$$d^2-c^2=(d+c)(d-c)=2N+1=a^2+b^2.$$

б) Если a и b оба четны, то $a^2+b^2=4N$. В этом случае положим $d=N+1$, $c=N-1$. Тогда

$$d^2-c^2=(d+c)(d-c)=2N\cdot 2=a^2+b^2.$$

2). Пусть ab нечетно: $ab=2n+1$. Тогда числа a и b — оба нечетные, а сумма их четна: $a+b=2m$. Имеем:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4m^2-4n-2,$$

то есть a^2+b^2 делится на 2, но не делится на 4. Поэтому $a^2+b^2\neq d^2-c^2$ ни при каких натуральных c и d: если c и d одинаковой четности (оба четны или оба нечетны), то $d^2-c^2=(d+c)(d-c)$ делится на 4, а если d и c разной четности, то d^2-c^2 не делится на 2.

М. Гервер

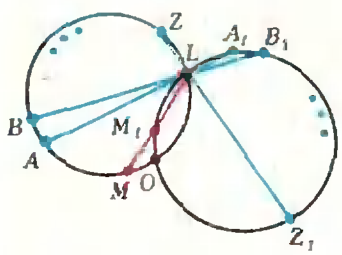


Рис. 3.

◆

М384. *Два одинаково ориентированных квадрата $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ имеют общую вершину O. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку.*

Наше решение покажет, что *аналогичное утверждение* верно и для правильных n-угольников с общей вершиной, и вообще для подобных друг другу вписанных n-угольников $OAB\ldots Z$ и $OA_1B_1\ldots Z_1$.

Опишем вокруг обоих n-угольников окружности. Пусть они пересекаются в точках O и L (рис. 3). *Если прямая l*, проходящая через L, равномерно вращается вокруг L с угловой скоростью ω, то вторые точки пересечения M и M_1 прямой l с той и другой окружностью движутся каждая по своей окружности равномерно с угловой скоростью 2ω (градусные величины дуг $\overline{OM}$ и $\overline{OM_1}$ вдвое больше градусной величины $\widehat{MLO}=\widehat{M_1LO}$). Таким образом, точка M_1 проходит вершины O, A_1, B_1, ..., Z_1 многоугольника $OA_1B_1\ldots Z_1$ *как раз в те моменты времени, когда M проходит, соответственно, вершины O, A, B, ..., Z многоугольника $OAB\ldots Z$*. Отсюда ясно, что все прямые AA_1, BB_1, ..., ZZ_1 пересекаются в одной точке — точке L, второй точке пересечения окружностей, описанных вокруг рассматриваемых подобных многоугольников *с общей вершиной* (рис. 4).

Н. Васильев

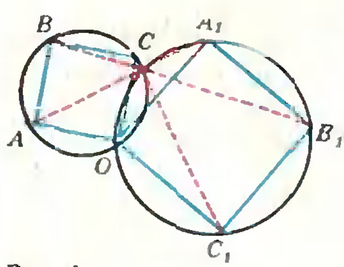


Рис. 4.

◆

Ф387. *Два велосипедиста в цирке едут с одинаковыми линейными скоростями v по окружностям радиусов R_1 и R_2, центры которых находятся на расстоянии l друг от друга ($l<R_1+R_2$). Один из велосипедистов движется по часовой стрелке, другой — против. Найти относительные скорости велосипедистов (в системе координат, связанной с одним из них) в тот момент, когда они оба находятся на линии, проходящей через центры окружностей, в точках: а) A_1 и A_2; б) A_1 и B_2; в) B_1 и B_2; г) B_1 и A_2 (рис. 5).*

В условии задачи дана скорость каждого велосипедиста относительно неподвижной системы координат (связанной, например, с ареной цирка). Такую скорость принято называть *абсолютной скоростью*.

По условию требуется найти *относительные скорости* велосипедистов. *Относительной скоростью*, например, второго велосипедиста называется его скорость по отношению к движущейся системе координат, связанной с первым велосипедистом. Слово «связанной» здесь означает, что первый велосипедист в этой системе неподвижен. Выберем в качестве такой системы систему с началом координат в центре O_1 окружности, по которой едет первый велосипедист, вращающуюся против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega=\dfrac{v}{R_1}$.

Удобство такого выбора состоит в том, что в данном случае легко определить движение любой точки вращающейся системы относительно неподвижной. Это движение принято называть переносным движением, а скорость любой точки движущейся системы относительно неподвижной называют *переносной скоростью*.

В нашем случае переносное движение есть движение по окружности с угловой скоростью ω. Следовательно, перенос-

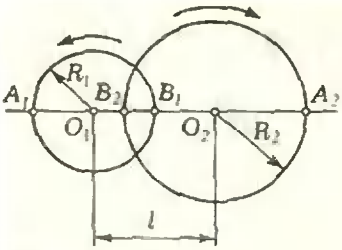


Рис. 5.

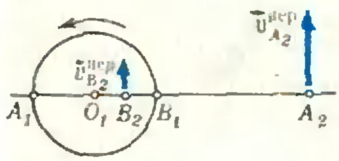


Рис. 6.

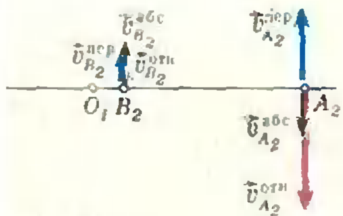


Рис. 7.

ная скорость второго велосипедиста в точке A_2 равна

$$|\vec{v}_{A_2}^{\text{пер}}| = \omega \cdot O_1A_2 = \frac{v}{R_1}(l + R_2),$$

а в точке B_2 —

$$|\vec{v}_{B_2}^{\text{пер}}| = \omega \cdot O_1B_2 = \frac{v}{R_1}(l - R_2).$$

В обеих точках переносные скорости перпендикулярны к прямой A_1A_2 и направлены в одну сторону (на рисунке 6 — вверх).

Абсолютная, относительная и переносная скорости точки связаны соотношением

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}},$$

то есть абсолютная скорость всегда равна векторной (геометрической) сумме относительной и переносной скоростей. Следовательно,

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{абс}} - \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Найдем относительную скорость второго велосипедиста, когда он находится в точке A_2. В этом случае абсолютная скорость равна по модулю $|\vec{v}_{A_2}^{\text{абс}}| = v$ и направлена вниз (рис. 7), а переносная скорость по модулю равна $\left|\vec{v}_{A_2}^{\text{пер}}\right| = \frac{v}{R_1}(l + R_2)$ и направлена вверх. Поэтому

$$\left|\vec{v}_{A_2}^{\text{отн}}\right| = v + \frac{v}{R_1}(l + R_2) = v\,\frac{R_1 + R_2 + l}{R_1}.$$

Направлена эта скорость вниз. Полученный результат не зависит от того, в какой точке в данный момент находится первый велосипедист.

В тот момент, когда второй велосипедист находится в точке B_2, $\left|\vec{v}_{B_2}^{\text{абс}}\right| = v$, $\left|\vec{v}_{B_2}^{\text{пер}}\right| = \frac{v}{R_1}(l - R_2)$ и обе скорости направлены одинаково (вверх на рисунке 7). Следовательно, в этот момент скорость второго велосипедиста относительно первого равна по модулю

$$\left|\vec{v}_{B_2}^{\text{отн}}\right| = v - \frac{v}{R_1}(l - R_2) = v\,\frac{R_1 + R_2 - l}{R_1}$$

и направлена вверх. Этот результат также не зависит от того, в какой точке в данный момент находится первый велосипедист.

Совершенно аналогичным образом определяется скорость первого велосипедиста в системе координат, связанной со вторым. В точке A_1 она направлена вниз и равна по модулю

$$\left|\vec{v}_{A_1}^{\text{отн}}\right| = v\,\frac{l + R_1 + R_2}{R_2},$$

а в точке B_1 относительная скорость направлена вверх и по модулю равна

$$\left|\vec{v}_{B_1}^{\text{отн}}\right| = v\,\frac{R_1 + R_2 - l}{R_2}.$$

◆

Ф388. В расположенном вертикально цилиндре переменного сечения (рис. 8) между поршнями находятся n молей воздуха. Массы поршней m_1 и m_2, их площади S_1 и S_2 соответственно. Поршни соединены стержнем длины l и находятся на одинаковых расстояниях от стыка ча-

Рассмотрим систему, состоящую из поршней, воздуха, заключенного между ними, и стержня. Внешние вертикальные силы, действующие на эту систему, суть следующие: сила тяжести $\vec{F}_\text{т}$ ($|\vec{F}_\text{т}| = (m_1 + m_2)|\vec{g}|$), сила атмосферного давления $\vec{F}_\text{a} = \vec{F}_{\text{a}1} + \vec{F}_{\text{a}2}$ ($|\vec{F}_\text{a}| = p_\text{a}(S_1 - S_2)$) и сила реакции $\vec{F}$ горизонтального участка стенок цилиндра (см. рис. 8). Силой тяжести воздуха можно пренебречь. По третьему *стей цилиндра с различными диаметрами. На сколько сместятся поршни при повышении температуры в цилиндре на Δt градусов?*

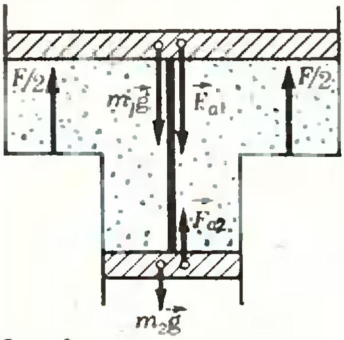


Рис. 8.

закону Ньютона сила F равна по модулю силе давления воздуха на горизонтальный участок цилиндра: $|\vec{F}| = p(S_1 - S_2)$, где p — давление воздуха между поршнями.

При механическом равновесии системы сумма проекций всех внешних сил на вертикальную ось равна нулю:

$$p(S_1 - S_2) - p_a(S_1 - S_2) - (m_1 + m_2)|\vec{g}| = 0.$$

(Внутренние силы — силы давления воздуха на поршни, сила упругости стержня — на равновесие влияния не оказывают.) Из условия равновесия следует, что давление воздуха в системе

$$p = p_a + \frac{(m_1 + m_2)|\vec{g}|}{(S_1 - S_2)}$$

и не зависит от температуры. Следовательно, повышение температуры воздуха на Δt градусов происходит изобарно, и состояния воздуха до и после нагревания можно описать уравнениями

$$p\left(\frac{l}{2}S_1 + \frac{l}{2}S_2\right) = nRT,$$

$$p\left[\left(\frac{l}{2} + x\right)S_1 + \left(\frac{l}{2} - x\right)S_2\right] = nR(T + \Delta t).$$

Здесь R — универсальная газовая постоянная, T — начальная температура и x — смещение поршней. Вычитая первое уравнение из второго, найдем смещение поршней:

$$x = \frac{nR\Delta t}{p_a(S_1 - S_2) + (m_1 + m_2)|\vec{g}|}.$$

Б. Буховцев

◆

Ф389. *Найти сопротивление между точками A и B и точками A и C бесконечной цепочки, показанной на рисунке 9. Сопротивление проволочек между узлами схемы 1 ом.*

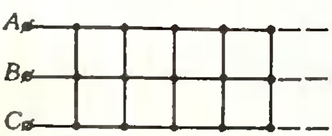


Рис. 9.

Для решения задачи воспользуемся тем обстоятельством, что сопротивление любой бесконечной цепи не меняется, если к ней подсоединить звено, повторением которого строится вся цепочка. Им в нашем случае является звено, состоящее из пяти сопротивлений, выделенных на рисунке 10. Поэтому сопротивления цепей, показанных на рисунках 10, *а* и *б*, одинаковы:

$$R_{AB} = R_{A'B'},\ R_{BC} = R_{B'C'},\ R_{AC} = R_{A'C'}.$$

Любую цепь, состоящую из сопротивлений и имеющую два вывода, всегда можно заменить одним эквивалентным сопротивлением. Точно так же составленную из сопротивлений цепь с тремя выводами можно заменить эквивалентной цепью, состоящей из трех сопротивлений, соединенных звездой (рис. 11, *а*) или треугольником (рис. 11, *б*). Заменим исходную цепь эквивалентной звездой. Так как исходная цепь симметрична, то $R_{AB} = R_{BC}$, то есть (см. рис. 11, *а*)

$$R_1 + R_3 = R_1 + R_2, \quad \text{или} \quad R_2 = R_3.$$

Итак, в эквивалентной схеме звезды два сопротивления одинаковы. Обозначим их через R. Тогда схемы, показанные

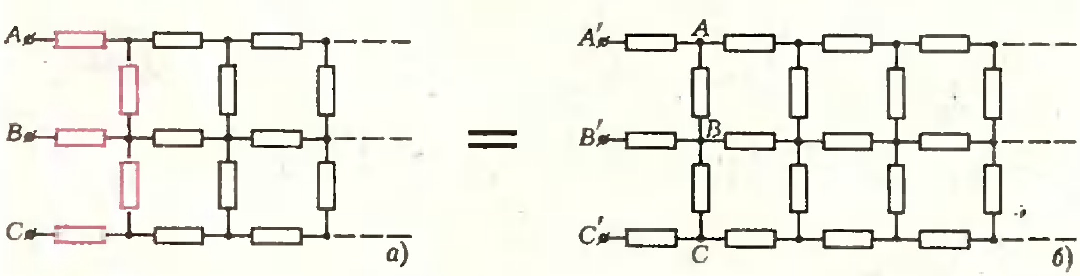


Рис. 10.

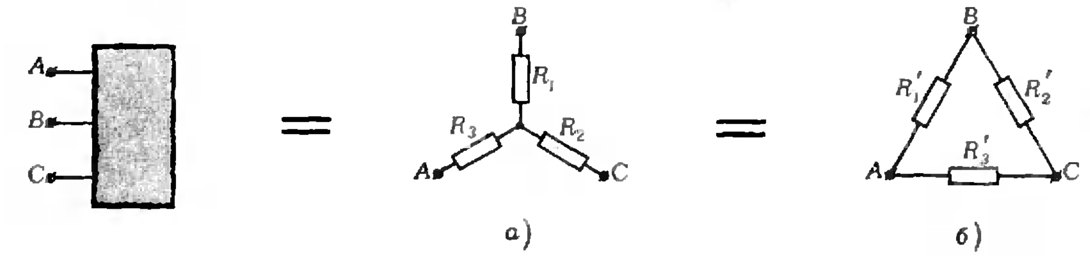


Рис. 11.

на рисунке 10, можно заменить эквивалентными схемами, показанными на рисунке 12. При этом (рис. 12, а)

$$R_{AB} = R_{BC} = R + R_1 \text{ и } R_{AC} = 2R.$$

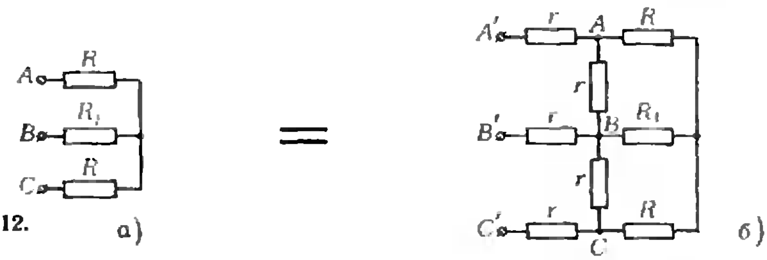


Рис. 12.

Сопротивления $R_{A'B'}$ и $R_{A'C'}$ найдем, последовательно заменяя одним сопротивлением несколько сопротивлений, включенных параллельно или последовательно. Для участка $A'B'$ (рис. 13)

$$R_{A'B'} = 2r + R^{***} = 2r + \frac{rR^{**}}{r+R^{**}} =$$

$$= 2r + \frac{r(R+R^*)}{r+R+R^*} = 2r + r\,\frac{R^2+2R_1R+R_1r+Rr}{(r+R)^2+2(r+R)R_1}.$$

При вычислении сопротивления $R_{A'C'}$ учтем, что точки O и E (рис. 14), благодаря симметрии цепи, имеют одинаковый потенциал, и поэтому сопротивление R_1 можно просто исключить. В результате получим

$$R_{A'C'} = 2r + R' = 2r + \frac{2rR}{r+R}.$$

Так как $R_{AC} = R_{A'C'}$,

$$2R = 2r + \frac{2rR}{r+R},$$

откуда

$$R = \frac{1}{2}r(1+\sqrt{5}).$$

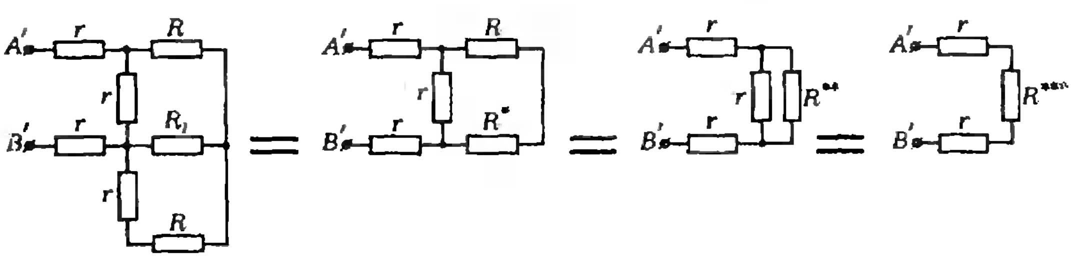


Рис. 13.

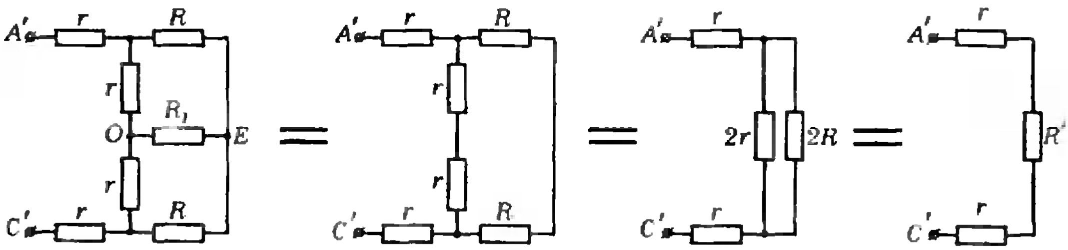


Рис. 14.

Теперь приравняем R_{AB} и $R_{A'B'}$:

$$R+R_1=2r+r\frac{R^2+2R_1R+R_1r+Rr}{(r+R)^2+2(r+R)R_1}.$$

В результате получим квадратное уравнение

$$aR_1^2+bR_1+c=0,$$

где

$$a=2(R+r)=(3+\sqrt{5})r,$$

$$b=3R^2-4r^2-2Rr=\frac{1}{2}r^2(\sqrt{5}-1),$$

$$c=(R+r)(R^2-2r^2-2Rr)=-\frac{1}{4}r^3(3+\sqrt{5})^2.$$

Решая это квадратное уравнение, найдем R_1:

$$R_1=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{-(\sqrt{5}-1)\pm\sqrt{294+126\sqrt{5}}}{4(3+\sqrt{5})}r.$$

Поскольку сопротивление не может быть отрицательным, то

$$R_1=\frac{-(\sqrt{5}-1)+\sqrt{294+126\sqrt{5}}}{4(3+\sqrt{5})}r\approx 1,1r.$$

Тогда окончательно

$$R_{AB}=R_{BC}=R+R_1\approx 2,7r=2,7\ \text{ом},$$

$$R_{AC}=2R=(1+\sqrt{5})r\approx 3,2\ \text{ом}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф390. *Два запаянных сообщающихся капиллярных сосуда цилиндрической формы разных диаметров частично заполнены водой (ртутью) (рис. 15). Воздух из сосудов откачан, так что над жидкостью имеются только ее пары. Как распределится количество жидкости в сосудах: а) на земле? б) в невесомости?*

Пусть радиус левого капиллярного сосуда равен r_1, правого — r_2. При равновесии на земле — случай а) — давления у правого и левого концов горизонтальной трубки, соединяющей сосуды, должны быть одинаковыми. Давление у дна каждого сосуда складывается из гидростатического давления $\rho|\vec{g}|h$ (h — высота столба жидкости, ρ — ее плотность), давления $p_н$ насыщенных паров и дополнительного (лапласовского) давления $p_л$, создаваемого силами поверхностного натяжения жидкости. В случае полного смачивания (вода) или полного несмачивания (ртуть) жидкости, находящейся в капилляре круглого сечения радиуса r, $p_л=\frac{2\sigma}{r}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Таким образом, в случае а) для воды, где силы поверхностного натяжения направлены вверх, при равновесии

$$\rho_в|\vec{g}|h_{1_в}+p_{н_в}-\frac{2\sigma_в}{r_1}=\rho_в|\vec{g}|h_{2_в}+p_{н_в}-\frac{2\sigma_в}{r_2},$$

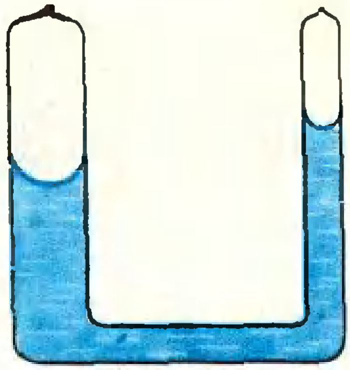


Рис. 15.

то есть разность уровней воды

$$h_{2_в} - h_{1_в} = \frac{2\sigma_в (r_1 - r_2)}{\rho_в |\vec{g}|\, r_1 r_2}.$$

Аналогично для ртути (здесь силы поверхностного натяжения направлены вниз) —

$$\rho_р|\vec{g}|h_{1_р} + p_{н_р} + \frac{2\sigma_р}{r_1} = \rho_р|\vec{g}|h_{2_р} + p_{н_р} + \frac{2\sigma_р}{r_2},$$

откуда

$$h_{1_р} - h_{2_р} = \frac{2\sigma_р (r_1 - r_2)}{\rho_р |\vec{g}|\, r_1 r_2}.$$

При расчетах предполагалось, что высота сосудов больше вычисленной разности уровней. В противном случае может, например, оказаться, что один из сосудов будет целиком заполнен жидкостью или другой сосуд будет совсем свободен от жидкости.

В случае б) — в состоянии невесомости — гидростатическое давление, обусловленное силой тяжести, отсутствует. Силы поверхностного натяжения заставят смачивающую жидкость покрыть внутреннюю поверхность обоих сосудов и соединяющей трубки. Сосуд меньшего диаметра при этом может быть заполнен целиком. Наоборот, несмачивающая жидкость в конце концов соберется в шарообразную каплю в большом сосуде. При достаточном количестве жидкости эта капля (разумеется, сплющенная) может заполнить сосуд большего диаметра целиком.

◆

Ф391. *Гладкий Г-образный стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня O (рис. 16). Маленькая муфта массы m прикреплена к стержню в точке A с помощью пружины жесткостью k. Длина пружины в 1,2 раза больше ее длины в нерастянутом состоянии. С какой угловой скоростью вращается стержень?*

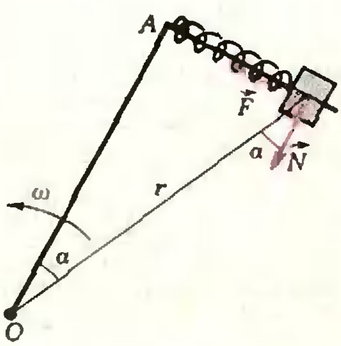


Рис. 16.

Во время вращения стержня в горизонтальной плоскости на муфту действуют сила упругости пружины $\vec{F}$ и сила реакции стержня $\vec{N}$ (см. рис. 16). Если l_0 — длина пружины в нерастянутом состоянии, а l — ее длина при вращении, то

$$|\vec{F}| = k(l - l_0) = k(1{,}2\ l_0 - l_0) = 0{,}2\ kl_0. \qquad (1)$$

Поскольку муфта скреплена со стержнем (с помощью пружины), при вращении она будет двигаться по окружности, радиус которой $r = l/\sin\alpha$. Обозначим угловую скорость вращения стержня через ω. Вращение равномерное, поэтому сумма проекций всех сил на направление касательной к окружности должна быть равна нулю:

$$|\vec{N}|\sin\alpha - |\vec{F}|\cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

а сумма проекций сил на направление радиуса равна

$$|\vec{N}|\cos\alpha + |\vec{F}|\sin\alpha = m\omega^2 r = m\omega^2 \frac{l}{\sin\alpha}, \qquad (3)$$

где $\omega^2 r$ — модуль центростремительного ускорения муфты.

Решая систему уравнений (2) и (3), найдем

$$|\vec{F}| = m\omega^2 l,$$

или, с учетом равенства (1),

$$0{,}2\ kl_0 = m\omega^2 \cdot 1{,}2 l_0.$$

Отсюда

$$\omega^2 = \frac{k}{6m}, \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{k}{6m}}.$$

◆

Ф392. *Доска массы M расположена горизонтально и опирается на два вращающихся цилиндра (рис. 17). Расстояние между осями цилиндров*

В горизонтальном направлении на доску действуют только силы сухого трения со стороны вращающихся цилиндров. Каждая сила трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости доски, и ее модуль пропорционален модулю силы нормального давления (а значит, и реакции

1. Коэффициент трения между доской и цилиндрами k. Доказать, что если доску, находящуюся в положении равновесия, слегка толкнуть в горизонтальном направлении, она будет совершать гармонические колебания, и найти период этих колебаний. Каким будет движение доски, если изменить направление вращения цилиндров на противоположное?

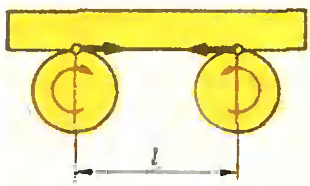


Рис. 17.

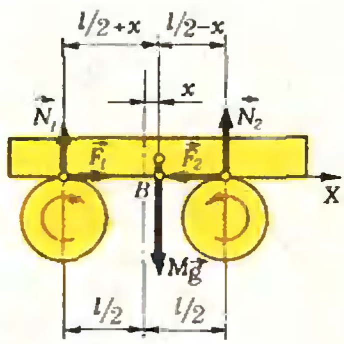


Рис. 18.

опоры). При вращении цилиндров в направлении, указанном в условии, сила, приложенная со стороны левого цилиндра, направлена вправо, а со стороны правого цилиндра — влево (см. рис. 17). Если доска находится в равновесии, то силы трения равны по модулю. Следовательно, равны и силы нормальной реакции каждого из цилиндров. Это означает, что центр тяжести доски при равновесии находится между цилиндрами на одинаковом расстоянии от каждого из них.

Пусть теперь доска смещена от своего положения равновесия на расстояние $x < l/2$, например, вправо (рис. 18). В этом положении силы нормального давления $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ уже не будут равны друг другу, а потому не будут компенсировать друг друга и силы сухого трения $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Результирующая сила $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ сообщит доске горизонтальное ускорение. Найдем его, вычислив предварительно $|\vec{N}_1|$ и $|\vec{N}_2|$ из условия отсутствия вертикального ускорения:

$$|\vec{N}_1| + |\vec{N}_2| - M|\vec{g}| = 0$$

и условия равенства нулю момента внешних сил относительно оси, проходящей через точку B:

$$|\vec{N}_2|\left(\frac{l}{2} - x\right) - |\vec{N}_1|\left(\frac{l}{2} + x\right) = 0.$$

Отсюда

$$|\vec{N}_1| = M|\vec{g}|\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right), \quad |\vec{N}_2| = M|\vec{g}|\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right).$$

Следовательно, проекция F результирующей силы на ось X, направленную вправо, равна

$$F = |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2| = k|\vec{N}_1| - k|\vec{N}_2| = -\frac{2kM|\vec{g}|}{l}\,x.$$

Мы видим, что результирующая сила пропорциональна по модулю смещению x доски от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению, то есть к положению равновесия. Таким образом, эта сила является возвращающей силой, аналогичной той, которая возникает при колебаниях маятника. Следовательно, доска совершает гармонические колебания.

Период колебаний можно найти, записав уравнение движения доски. Для проекций на ось X

$$Ma_x = -\frac{2kM|\vec{g}|}{l}\,x, \quad \text{или} \quad a_x = -\frac{2k|\vec{g}|}{l}\,x.$$

Модуль коэффициента пропорциональности между смещением и ускорением представляет собой квадрат циклической частоты колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{2k|\vec{g}|}{l}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2k|\vec{g}|}}.$$

При изменении направления вращения цилиндров на противоположное результирующая горизонтальная сила также изменит свое направление. При смещении доски эта сила уже не будет возвращать ее к положению равновесия, а, наоборот, будет уводить тем больше, чем больше первоначальное смещение. В результате доска соскочит с цилиндров.

Рассмотренный прибор впервые был предложен профессором Н. Е. Жуковским и носит его имя.

Б. Буховцев

А. Землянов, Б. Ивлев

17 задач по анализу
(пределы, непрерывность, монотонность, производная)

Приводимые ниже задачи адресованы девятиклассникам. Для их решения не нужно делать никаких вычислений: достаточно понимать соответствующие определения из учебника «Алгебра и начала анализа 9» и их интерпретацию на графиках функций.

§ 1. Пределы функций (п. 38)

1. На рисунках 1, *а* — *в* изображены графики функций $y = f(x)$, определенных при $x \neq 0$. Укажите:

а) в каких случаях существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (и чему он равен);

б) в каких случаях предела $f(x)$ при $x \to 0$ не существует (и объясните, почему).

График на рисунке 1, *в* — это бесконечнозвенная ломаная, точки излома которой имеют абсциссы $x = \pm {}^1/n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ (четным n соответствуют точки минимума, нечетным — точки максимума).

2. Функции $y = f(x)$, графики которых изображены на рисунках 2, *а*—*г*, определены при $x < 0$. Доопределите эти функции при $x > 0$ (достройте графики) так, чтобы для полученных функций:

а) существовал предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (всегда ли так можно сделать? если нельзя, то объясните, почему);

б) не существовало предела $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (всегда ли так можно сделать?).

Дайте не один, а, скажем, два или три разных способа достраивания графика (в тех случаях, когда требованиям задачи можно удовлетворить).

§ 2. Непрерывность функций (п. 38)

3. Нарисуйте график всюду определенной функции $y = f(x)$, которая была бы непрерывна во всех точках x, кроме: а) $x = 100$; б) $x = \pm 1$; в) $x = 1, 2, 3, 10$; г) $x = n$, где n — произвольное целое число.

4. Среди функций, графики которых изображены на рисунках 3, *а*—*г*, укажите те, которые не непрерывны (разрывны) в точке $x = x_0$ или $x = x_1$.

5. Дорисуйте (желательно несколькими способами) графики на рисунках 4, *а*—*г* так, чтобы получились графики всюду определенных и всюду непрерывных функций. Во всех ли случаях это возможно?

§ 3. Монотонность функций

6. Функция f всюду определена и убывает на всей числовой оси. Может ли при этом функция f быть:

а) всюду положительной (то есть такой, что $f(x) > 0$ при любом x)?

б) всюду отрицательной? в) чётной?

г) нечетной? д) периодической?

7. Укажите промежутки возрастания и убывания функций, графики которых изображены на рисунках 5, *а*—*в*.

8. Известно, что функция f убывает на промежутках: а) $[0,1[$ и $[1,2[$; б) $[0,1]$ и $]1,2[$. Можно ли утверждать, что функция f убывает:

1) на объединении этих промежутков — на полуинтервале $[0,2[$?

2) на «подпромежутке» $[0,1/2[$?

9. Нарисуйте график функции $y = f(x)$ так, чтобы она:

а) убывала на промежутках $]-\infty, -2]$ и $[1,4]$ и возрастала на промежутках $[-2,1]$ и $[4, +\infty[$;

б) возрастала на каждом промежутке вида $[n, n+1]$, где n — целое, но не возрастала ни на каком промежутке длины больше единицы;

в) возрастала на множестве всех целых значений x и убывала на множестве всех остальных чисел.

Можно ли при этом «сделать» функцию f всюду отрицательной?

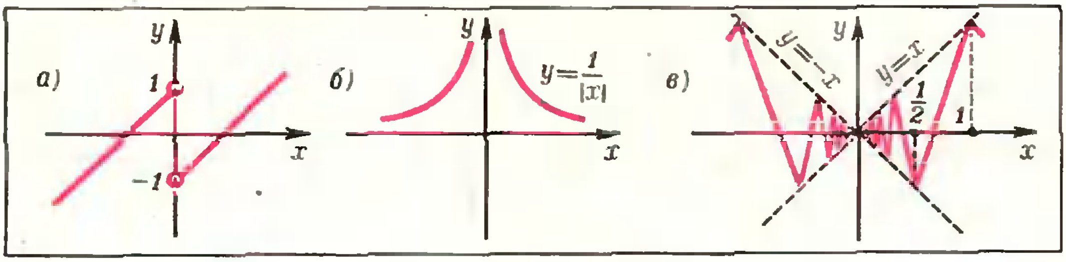


Рис. 1.

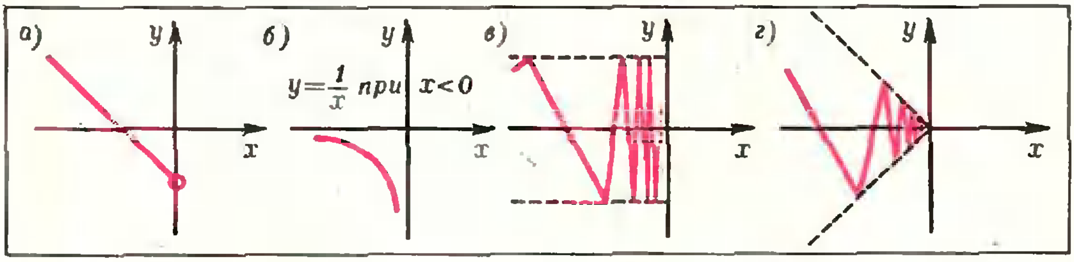


Рис. 2.

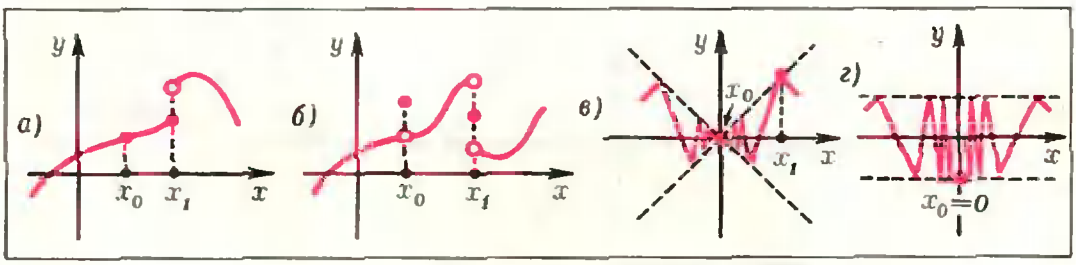


Рис. 3.

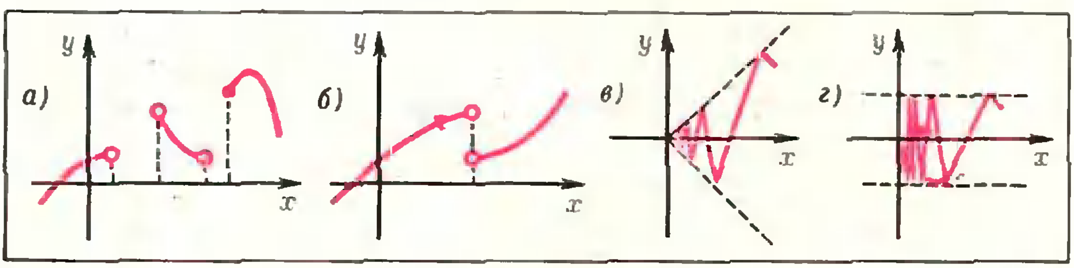


Рис. 4.

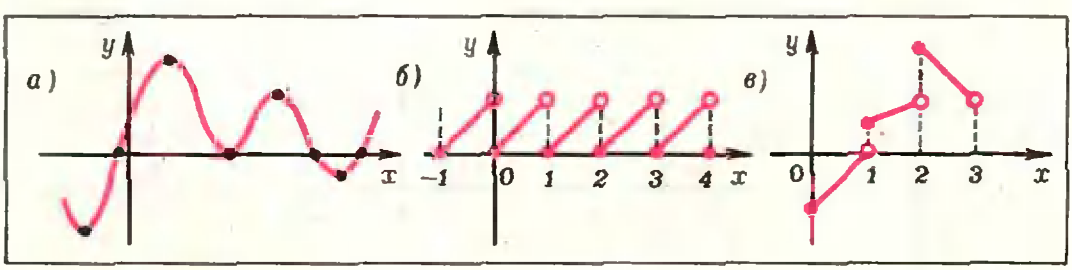


Рис. 5.

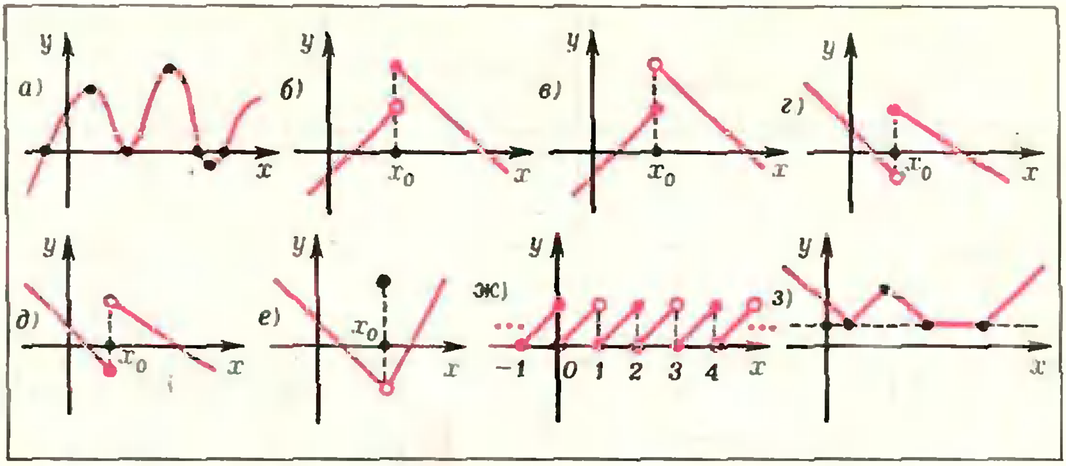


Рис. 6.

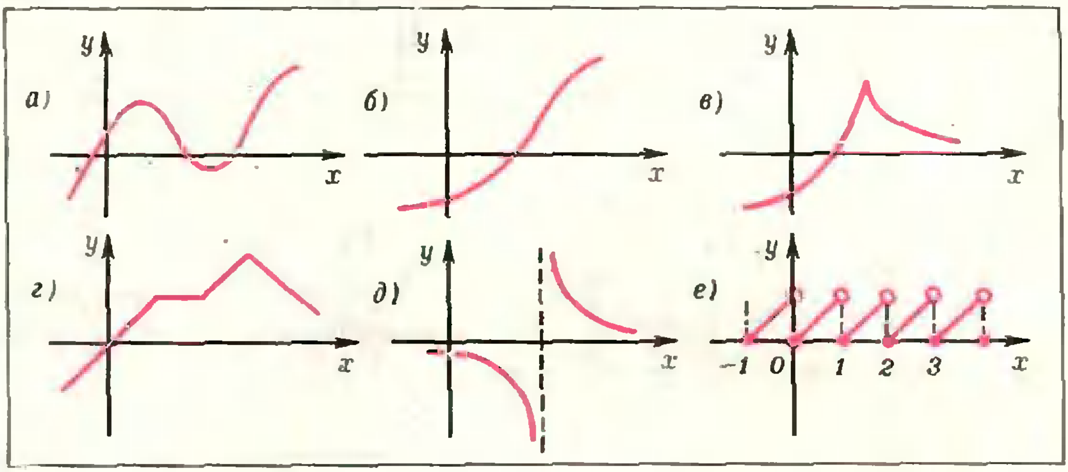


Рис. 7.

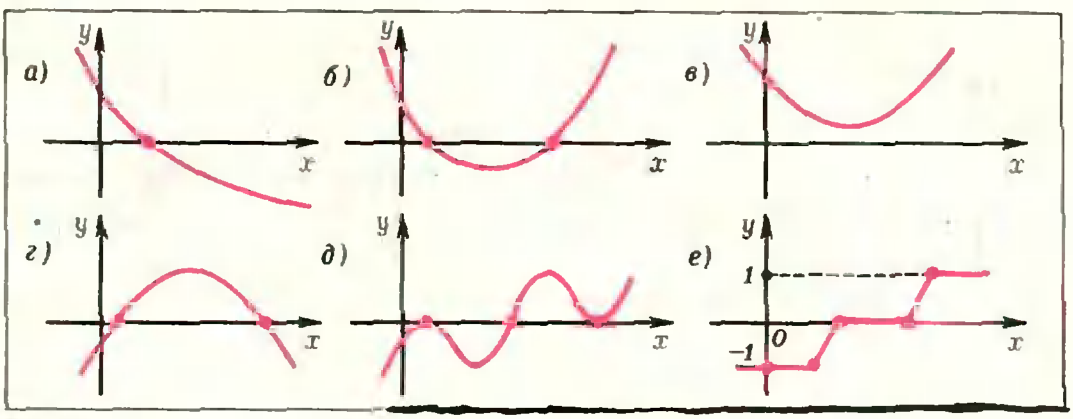


Рис. 8

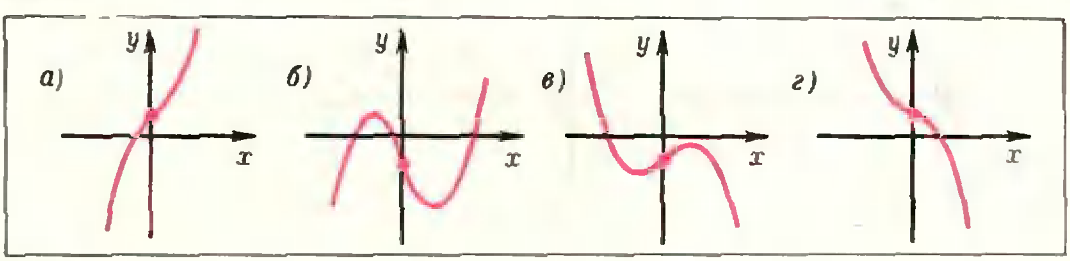


Рис. 9

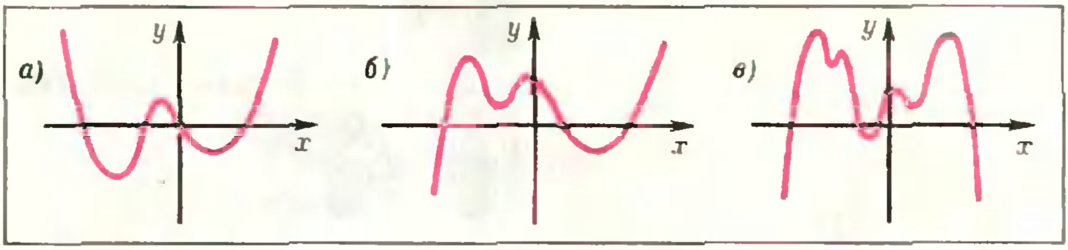


Рис. 10.

§ 4. Экстремумы функций

10. А) Нарисуйте график всюду определенной и всюду непрерывной функции так, чтобы у нее было ровно: а) 0, б) 1, в) 2, г) 3, д) 10, е) бесконечно много — точек экстремума.

Б) Можно ли при этом сделать так, чтобы все точки экстремума лежали на отрезке [0,1]?

11. Для функций, графики которых изображены на рисунках 6, *а—з*, укажите все точки максимума и минимума, если они есть.

§ 5. Производная

12. На рисунках 7, *а—е* изображены графики функций $y = f(x)$. В тех же системах координат (или же под графиками функций $y = f(x)$) нарисуйте примерные графики производных $y = f'(x)$ (при тех значениях x, при которых производная существует; напомним, что в точках разрыва и в точках «излома» графика функции производной не существует).

13. По графикам производных $y = f'(x)$, изображенных на рисунках 8, *а—е*, восстановите примерные графики функций $y = f(x)$. Одна ли такая функция f существует в каждом из случаев? Иными словами, не могут ли две различные функции иметь одну и ту же производную?

14. Можно ли утверждать, что:

а) производная любой четной функции является 1) четной? 2) нечетной?

б) производная любой нечетной функции является 1) нечетной? 2) четной?

в) производная периодической функции является периодической?

15. Может ли:

а) производная всюду положительной функции быть: 1) всюду отрицательной? 2) всюду положительной?

б) производная всюду определенной не периодической функции быть периодической?

в) производная всюду определенной функции, не являющейся ни четной, ни нечетной, быть: 1) четной? 2) нечетной?

§ 6. Многочлены

16А) На рисунках 9, *а—г* изображены графики кубических многочленов вида $y = ax^3 + bx + c$; масштаб не указан. В каждом из случаев определите знаки коэффициентов a, b, c.

Б) Могут ли эти графики быть графиками кубических многочленов вида $y = ax^3 + bx^2 + c$?

17. Какую наименьшую степень могут иметь многочлены

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_1x + a_0,$$

если их графики выглядят так, как показано на рисунках 10, *а—в*?

Физики шутят

Однажды в гостях у голландского физика-теоретика Пауля Эренфеста собрались Нильс Бор, Вольфганг Паули и Абрам Федорович Иоффе. Эренфест, Бор и Иоффе расположились на диване, а Паули, по своему обыкновению, ходил по комнате из угла в угол. Немного погодя Бор сказал ему:

— Перестань, пожалуйста, ходить! Это меня раздражает!

— А что именно тебя раздражает? Спросил Паули.

Пока Бор обдумывал ответ, Эренфест, известный своим остроумием, произнес:

— Его раздражает, что ты возвращаешься.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В чемпионате мира среди профессионалов по крестикам-ноликам на бесконечной клетчатой доске участвовало 10 игроков. Проигравший партию, потеряв надежду на главный приз, уезжал с чемпионата. Какое максимальное число участников могло выиграть по две партии? (В «крестиках-ноликах» на бесконечной доске выигрывает тот, кто поставит пять своих значков подряд по одной линии — вертикали, горизонтали или диагонали; ничьих не бывает.)

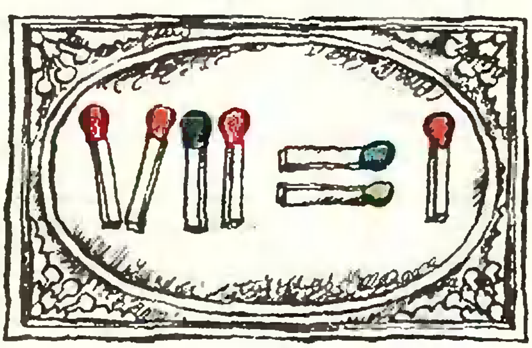
2. Когда одного любителя головоломок спросили, отчего он так успешно решает задачи, то в ответ было написано

Н:Е=0, СТАРЕЮ СТАРЕЮ СТАРЕЮ

Попробуйте расшифровать эту запись.

3. В этом примере на умножение (см. рисунок) одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, разными — разные, вместо звездочек могут стоять любые цифры. Расшифруйте пример.

4. В неверном равенстве из спичек (см. рисунок) переложить одну спичку так, чтобы оно превратилось в верное.



НА РЫБАЛКЕ (РАССКАЗ-ЗАДАЧА)

Ю. Горст

Ранним июньским утром Коля, Петя и Вася отправились на рыбалку. Дорогой между ними завязался неторопливый разговор.

— Не вернуться бы нам с рыбалки с пустыми руками.

— А ты знаешь, это еще не самое плохое. Недавно на уроке математики учительница рассказала нам, что один известный физик, решая в детстве на экзамене задачу о трех рыболовах, получил в ответе минус две рыбы.

— Да, минус две рыбы — это хуже нуля. А какая же задача была?

— Вот какая. Три рыболова, наловив окуней, заночевали у реки. Ночью один из них проснулся и решил, не тревожа товарищей, отправиться домой. Число пойманных рыб не делилось на три, поэтому он одну из них выбросил в воду, взял третью часть оставшихся рыб и ушел. Ночью проснулся и второй рыболов и, не зная, что первый уже ушел, тоже пересчитал рыб, одну выкинул, треть оставшихся взял себе и ушел. Точно так же поступил и третий рыболов, ничего не знавший об уходе своих товарищей. Спрашивается, сколько рыб поймали рыболовы.

— Интересная задача. Ну-ка, проверим ответ. Значит, поймали они «минус две» рыбы — на три, действительно, не делится. Первый рыболов одну рыбу выбросил — стало «минус три» рыбы, теперь на три делится. Значит, «минус одну» рыбу рыболов взял себе, осталось... опять «минус две» рыбы. Ну, а дальше ясно: так же будет и у двух других рыболовов. Ты смотри, все получается. А как зовут этого физика?

— Вот забыл. Ты, Петя, случайно не запомнил?

— Запомнил. Поль Дирак. Он потом прославился тем, что предсказал существование античастиц. Наверное, ему в этом помогло умение находить отрицательные «решения»: ведь античастица — это вроде «минус частицы».

Несколько минут ребята шли молча, затем разговор возобновился.

— В рыбацком деле многое зависит от удачи. Вот я — невезучий во всем. Помните, была последняя контрольная по физике, так я тогда двойку получил. Ведь вы оба не лучше меня все знали, а двоек избежали. Я и на рыбалке на успех не надеюсь.

— Это ты потому двойку получил, что Николай Геннадиевич тебе задачу на повторение дал. А наш Иннокентий Петрович дал контрольную на то, что мы недавно проходили.

Вот и речка. Забросив удочки в воду, ребята стали внимательно следить за поплавками.

— Смотри, у тебя клюет.

— И правда. Так... так... Есть! Гляньте, какой красавчик этот окунек.

— Не говори так громко, всю рыбу распугаешь. Когда только ты научишься шепотом говорить? И на уроках все время нам замечания: разговоры, разговоры... Ого, и у меня клюнуло. Тоже окунь!

С утра рыба клевала хорошо, а затем, когда припекло солнце и клев ослабел, ребята стали подсчитывать свой улов.

— Смотрите-ка, я больше всех рыбы поймал.

— Да у тебя рыба-то всё мелкая: одни ерши да плотва.

— Это ничего, что у него рыба мелкая: из ершей как раз уха вкусная получается.

Покончив с подсчетами и искупавшись, ребята отправились домой. Настроение у всех было хорошее, но особенно был доволен Петя — он, новичок в рыбалке, наловил рыбы больше, чем заядлый рыболов Вася.

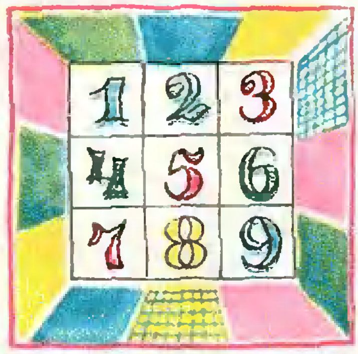
* * *

Вы прочитали этот рассказ? Тогда попробуйте ответить на два вопроса.

1. *Как зовут васиного учителя физики?*

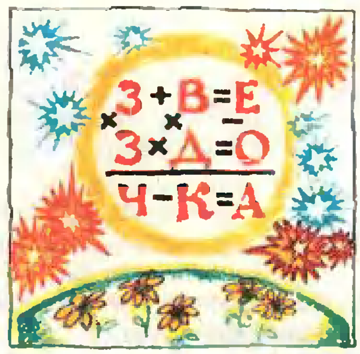
2. *Каков наименьший (положительный!) ответ в задаче, которую решал Дирак?*

Квадраты в квадрате



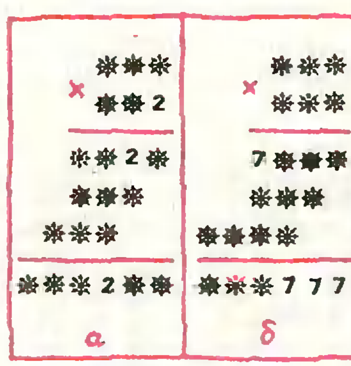
В квадрате 3×3 записаны цифры от 1 до 9. Переставьте эти цифры так, чтобы три образовавшихся трехзначных числа были точными квадратами.

Звездочка



Каждая буква — некоторая цифра. А какая именно?

Ребусы



Поставьте вместо звездочек цифры так, чтобы получились правильно выполненные примеры на умножение.

Л. Мочалов

Г. Дорофеев, Н. Розов

Периодичность и непериодичность функций

Понятие периодической функции относится к числу важнейших понятий математики, широко используемых в вузовских курсах. Поэтому поступающие должны хорошо понимать определение периодической функции, знать основные свойства этих функций, уметь доказывать периодичность (или непериодичность) той или иной конкретной функции. Подчеркнем, что включение в школьную программу элементов математического анализа открывает дополнительные возможности для решения задач такого рода.

Мы не будем здесь подробно обсуждать само определение периодической функции *). Отметим лишь, что при его формулировке поступающие часто допускают ошибку, связанную с невниманием к области определения функции **).

Когда заходит речь о конкретных примерах периодических функций, поступающие обычно ограничиваются указанием на основные тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Между тем запас периодических функций, встречающихся в школьном курсе, гораздо шире.

Большое число периодических функций можно строить по формуле $y = f(g(x))$, если в качестве g взять периодическую функцию, а в качестве f — произвольную функцию, например, $\sin^3 2x$, $\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$,

$$\log_2 \cos(x-4),\ |\sin x - 2\cos^2 x|,$$

$$\arcsin(\cos x),\ \ln\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Действительно, как непосредственно следует из определения, если число $T > 0$ — период функции $g(x)$, то функция $f(g(x))$ — периодическая с тем же периодом T.

Напомним еще один пример периодической функции, внешне никак не связанной с тригонометрическими функциями — это $y = \{x\}$, то есть дробная часть числа x. Кроме того, не следует забывать, что периодической функцией является и постоянная, скажем, $y = -2$, $x \in \mathbf{R}$.

Обычно поступающие относительно легко справляются с задачами, в которых требуется доказать периодичность функций, подобных только что указанным. В таких случаях, как правило, угадывается период, после чего доказательство сводится к простой проверке определения. Но значительные трудности возникают тогда, когда нужно доказать *непериодичность* конкретной функции.

Дело в том, что определение периодической функции имеет довольно сложную логическую структуру. Поэтому уже саму формулировку того факта, что функция $f(x)$ *не является периодической* (то есть *является непериодической*), привести не так-то просто, а использовать эту громоздкую формулировку весьма затруднительно. Иногда складывается парадоксальная ситуация: поступающему совершенно ясно, что предложенная ему функция — непериодическая (и это действительно так!), но доказать это он не может.

Между тем для доказательства непериодичности часто вовсе и не нужно точно формулировать определение непериодической функции. Гораздо более простым оказывается иной, обходной путь. Именно, мы можем воспользоваться следующим логиче-

*) См. учебные пособия «Алгебра и начала анализа 9», п. 69 и «Алгебра и начала анализа 10», с. 173, а также статью А. Землякова и Б. Ивлева «Периодические функции» («Квант», 1976, № 12).

**) Об этом говорилось уже в статье А. А. Рывкина «Периодические функции» («Квант», 1973, № 5).

ски очевидным утверждением: *если все периодические функции обладают некоторым свойством, а данная функция этим свойством не обладает, то данная функция не является периодической.*

Конечно, для того чтобы этот обходной путь был эффективным, надо иметь набор общих свойств периодических функций. Укажем несколько таких свойств.

Шесть свойств периодических функций

I. *Если точка x_0 принадлежит области определения периодической функции $f(x)$ с периодом T, то ее области определения принадлежат и все точки $x_0 + nT$, $n \in \mathbf{Z}$.*

В частности, *область определения периодической функции содержит сколь угодно большие по абсолютной величине положительные и отрицательные числа.*

Это свойство есть очевидное следствие определения периодической функции. Отсюда, например, вытекает, что функция, заданная только на положительной полуоси $]0, \infty[$, не может быть периодической. Поэтому не является периодической, например, логарифмическая функция $y = \ln x$.

II. *Периодическая функция принимает каждое свое значение в бесконечном числе значений аргумента, среди которых есть сколь угодно большие по абсолютной величине положительные и отрицательные числа.*

В частности, *периодическая функция не может быть возрастающей или убывающей на всей области определения.*

Это свойство немедленно вытекает из равенства

$$f(x + nT) = f(x), \; n \in \mathbf{Z}, \qquad (1)$$

справедливого для периодической функции $f(x)$ с периодом $T > 0$. Отсюда, например, следует, что функция, возрастающая на всей числовой прямой, не может быть периодической.

Рассказывая о свойствах показательной функции $y = a^x$, поступающие, как правило, не в состоянии доказать, что она не является периодической. Между тем эта функция возрастает (при $a > 1$) или убывает (при $0 < a < 1$) на $\mathbf{R}$ (что доказывается в учебнике), а потому непериодическая.

III. *Если $f(x)$ — периодическая функция, определенная на всей числовой прямой, то уравнение*

$$f(x + T) = f(x), \qquad (2)$$

где T рассматривается как неизвестное, а x — как параметр, имеет по крайней мере одно положительное решение $T = T_0$, удовлетворяющее уравнению сразу при всех значениях параметра $x \in \mathbf{R}$.

Это свойство фактически представляет собой переформулировку определения: ведь если функция $f(x)$ — периодическая, то существует такое число $T_0 > 0$, что для любого $x \in \mathbf{R}$

$$f(x + T_0) = f(x),$$

а это и означает, что число T_0 является корнем уравнения (2) для *всякого* значения параметра x.

С последним свойством связан следующий стандартный способ доказательства непериодичности функции $f(x)$: если нам удастся указать такие два значения аргумента $x = a$ и $x = b$, что уравнения

$$f(a + T) = f(a)$$

и

$$f(b + T) = f(b)$$

не имеют *общего* положительного решения $T = T_0$, то функция $f(x)$ не является периодической.

IV. *Если для периодической функции f с периодом T на некотором отрезке $[\alpha, \alpha + T]$ выполнено неравенство*

$$|f(x)| \leqslant M, \qquad (3)$$

то это неравенство выполняется и для любого значения аргумента.

В частности, *для периодической функции $f(x)$, определенной и непрерывной на всей числовой прямой, существует такое число $M > 0$, что неравенство* (3) *выполняется для всех $x \in \mathbf{R}$.*

Свойство IV вытекает из следующих рассуждений. Пусть функция f — периодическая с периодом T и пусть неравенство (3) справедливо для $x \in [\alpha, \alpha + T]$. Тогда в силу равенства (1) это неравенство справедливо и на любом отрезке

$[\alpha+nT,\ \alpha+(n+1)T]$, $n\in\mathbf{Z}$. Однако любое значение аргумента принадлежит одному из таких отрезков.

V. *Если периодическая функция дифференцируема, то ее производная — периодическая функция с тем же периодом.*

Это свойство доказывается так. Прежде всего из определений производной и периодической функции следует, что если периодическая функция $f(x)$ с периодом T имеет производную $f'(x)$ в некоторой точке x, то она имеет производную и в точке $x+T$. Другими словами, если $x\in D(f')$, то и $x+T\in D(f')$. Остается убедиться, что

$$f'(x+T)=f'(x) \qquad (4)$$

при $x\in D(f')$. Обозначим через $g(x)$ функцию $f(x+T)$ и рассмотрим ее как сложную функцию с «внутренней» функцией $x+T$ и «внешней» функцией $f(x)$. Тогда по формуле для производной сложной функции будем иметь

$$g'(x)=f'(x+T)\cdot(x+T)'=f'(x+T). \qquad (5)$$

Но в силу периодичности $g(x)=f(x)$, так что

$$g'(x)=f'(x). \qquad (6)$$

Из равенств (5) и (6) вытекает равенство (4). Таким образом, $f'(x)$ — периодическая функция с периодом T.

VI. *Если $f(x)$ — периодическая функция, определенная на всей числовой прямой и отличная от постоянной, то не существует предела функции $f\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to 0$.*

Это свойство можно получить из нестрогих графических соображений. Пусть x стремится к нулю, оставаясь положительным; тогда выражение $1/x$ неограниченно возрастает. Так как периодическая функция f при возрастании аргумента «колеблется», то функция $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ «колеблется» в окрестности точки $x=0$ и потому не имеет предела при $x\to 0$.

Строгое доказательство сформулированного свойства проведем методом от противного. Допустим, что

$$\lim_{x\to 0} g(x)=A. \qquad (7)$$

Сначала убедимся, что функция $g(x)$ хотя бы в одной точке $x>0$ принимает значение, отличное от A. В самом деле, если $g(x)=A$ при любом $x>0$, то $f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=A$ при всех $x>0$. Но тогда из периодичности функции $f(x)$ следует, что $f(x)$ постоянна на всей числовой прямой, а это противоречит условию.

Следовательно, существует такая точка $x_0>0$, что

$$g(x_0)=\alpha\neq A.$$

Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{2}|A-\alpha|>0$. По определению предела из равенства (7) вытекает существование числа $\delta>0$ такого, что для *любого* $x\neq 0$, удовлетворяющего неравенству

$$|x|<\delta, \qquad (8)$$

выполняется неравенство

$$|g(x)-A|<\varepsilon. \qquad (9)$$

Однако для достаточно большого $n\in\mathbf{Z}$ число

$$x^*=\frac{x_0}{1+nTx_0}$$

неравенству (8) удовлетворяет *), а неравенство (9) при $x=x^*$ не выполняется:

$$g(x^*)=g\left(\frac{x_0}{1+nTx_0}\right)=f\left(\frac{1+nTx_0}{x_0}\right)=f\left(\frac{1}{x_0}+nT\right)=f\left(\frac{1}{x_0}\right)=g(x_0)=\alpha,$$

и поэтому

$$|g(x^*)-A|=|\alpha-A|>\frac{1}{2}|\alpha-A|=\varepsilon.$$

Мы пришли к противоречию с равенством (7).

Примеры

Покажем теперь на нескольких примерах, как можно использовать приведенные выше свойства периодических функций для доказательства непериодичности конкретной функции.

Пример 1. *Доказать непериодичность функций*

$f_1(x)=\cos\ln|x|$; $f_2(x)=\sqrt{x(x-1)}$; $f_3(x)=\arcsin x$.

Если бы функция $f_1(x)$ была периодической с периодом $T>0$, то, поскольку $T\in D(f_1)$, по свойству

---

*) Чтобы найти нужное значение n, следует решить неравенство (напомним, что $x_0>0$)

$$\frac{x_0}{1+nTx_0}<\delta.$$

I выполнялось бы условие

$$0 = T - T \in D(f_1),$$

что, очевидно, неверно.

Предположим, что функция $f_2(x)$ — периодическая с периодом T. Возьмем такое целое n, что

$$x^* = \frac{1}{2} + nT > 1.$$

Тогда $x^* \in D(f_2)$, и по свойству I

$$x^* - nT = \frac{1}{2} \in D(f_2),$$

что неверно.

Функция $f_3(x)$ определена на отрезке $[-1, 1]$ и, следовательно, не является периодической в силу свойства I.

Пример 2. *Доказать непериодичность функций*

$$f_1(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1}, \quad f_2(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2}) + \cos(x\sqrt{3}),$$

$$f_3(x) = 2x - \cos x.$$

Уравнение

$$\frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1} = a$$

(где $a \in \mathbf{R}$) может иметь, как легко видеть, не более двух корней. Поэтому функция $f_1(x)$ каждое свое значение принимает не более чем в двух точках и потому по свойству II не является периодической.

Функция $f_2(x)$ при $x = 0$ принимает значение 3. Решим уравнение

$$\cos x + \cos(x\sqrt{2}) + \cos(x\sqrt{3}) = 3. \quad (10)$$

Так как $|\cos t| \leqslant 1$, то уравнение (11) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos(x\sqrt{2}) = 1, \\ \cos(x\sqrt{3}) = 1. \end{cases}$$

Но первое уравнение системы удовлетворяется при $x = 2k\pi$, а второе — при $x = \frac{2n\pi}{\sqrt{2}}$ $(k, n \in \mathbf{Z})$ и, как нетрудно убедиться, обе эти серии значений x имеют лишь единственную общую точку $x = 0$, которая, очевидно, удовлетворяет и третьему уравнению системы. Следовательно, уравнение (10) имеет только один корень. Другими словами, функция $f_2(x)$ принимает значение 3 только один раз и по свойству II не является периодической.

Вычислим производную функции $f_3(x)$:

$$f_3'(x) = 2 + \sin x.$$

Мы видим, что $f_3'(x) > 0$ при любом $x \in \mathbf{R}$, и, следовательно, функция $f_3(x)$ — возрастающая на всей числовой прямой; по свойству II она не является периодической.

Пример 3. *Выяснить, является ли периодической функция*

$$f(x) = \{x\} + \sin x.$$

Для решения этой задачи используем путь, связанный со свойством III. Предположим, что $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T > 0$. Тогда при любом значении x справедливо равенство

$$\{x + T\} + \sin(x + T) = \{x\} + \sin x.$$

В частности, при $x = 0$ отсюда имеем

$$\{T\} + \sin T = 0, \quad (11)$$

а при $x = -T$ получаем

$$0 = \{-T\} - \sin T. \quad (12)$$

Складывая равенства (11) и (12), мы приходим к равенству

$$\{T\} + \{-T\} = 0.$$

Вспомним, что дробная часть $\{x\}$ любого числа x неотрицательна. Поэтому последнее равенство возможно только если $\{T\} = \{-T\} = 0$, то есть если T — целое число. Далее, если $\{T\} = 0$, то из равенства (11) следует, что $\sin T = 0$, то есть что $T = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Между тем число $k\pi$ при любом целом $k \neq 0$ не является целым числом, поскольку π — иррационально, и потому уравнения (11) и (12) имеют лишь один общий корень $T = 0$. Таким образом, функция $f(x)$ не является периодической.

Пример 4. *Доказать непериодичность функции*

$$f(x) = 2x\cos(x^2).$$

Допустим, что функция $f(x)$ — периодическая и $T > 0$ — ее период. Так как $f(x)$ определена на всей числовой прямой и $|f(x)| \leqslant 2T$ при $x \in [0, T]$, то согласно свойству IV при любом $x \in \mathbf{R}$

$$|f(x)| = |2x\cos(x^2)| \leqslant 2T.$$

Однако это неравенство не выполняется при $x = \sqrt{2n\pi}$, если только натуральное число n подобрано так, что $\sqrt{2n\pi} > T$.

Пример 5. *Доказать непериодичность функций*

$$f_1(x) = \sin(x^2),\ f_2(x) = 2\sin x + \sin(x\sqrt{2}).$$

Вычислим производные данных функций:

$$f_1'(x) = 2x\cos(x^2),$$

$$f_2'(x) = 2\cos x + \sqrt{2}\cos(x\sqrt{2}).$$

Функция $f_1'(x)$, как показано в примере 4, не является периодической, так что, по свойству V, не является периодической и функция $f_1(x)$. Функция $f_2'(x)$ также не является периодической (доказательство этого факта, по существу, проведено в примере 2) и, следовательно, на основании свойства V не является периодической функция $f_2(x)$.

Пример 6. *Доказать непериодичность функции*

$$f(x) = e^{\sqrt{\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|}}.$$

Эта функция выглядит довольно страшно, и совершенно не ясно, на каком из свойств здесь удастся сыграть. Однако вопрос решается легко, если догадаться «упростить» данную функцию; при этом, конечно, мы будем пользоваться не тождественными преобразованиями, а тем фактом, что в случае периодичности функции $f(x)$ функция $g(f(x))$ также периодическая.

Итак, пусть функция $f(x)$ — периодическая. Тогда периодическими должны быть и следующие функции:

$$f_1(x) = \ln|f(x)| = \sqrt{\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|},$$
$$f_2(x) = |f_1(x)|^2 = \operatorname{arctg}|\sin(x^2)|,$$
$$f_3(x) = \operatorname{tg}|f_2(x)| = |\sin(x^2)|,$$
$$f_4(x) = |f_3(x)|^2 = \sin^2(x^2).$$

Однако последняя из этих функций периодической не является, ибо ее производная

$$f_4'(x) = 2x\sin(2x^2)$$

непериодична (это доказывается так же, как в примере 4). Полученное противоречие показывает, что предположение о периодичности функции $f(x)$ неверно.

Пример 7. *Доказать, что любой многочлен*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

($a_0 \neq 0$) не является периодической функцией.

Предположим, что функция $f(x)$ — периодическая. Тогда, по свойству V, и ее производная $f'(x)$ — периодическая функция. Но отсюда следует, что и $f''(x) = [f'(x)]'$ — также периодическая функция, и т. д. В частности, периодической функцией будет $(n-1)$-я производная многочлена $f(x)$:

$$f^{(n-1)}(x) = n!\,a_0x + (n-1)!\,a_1.$$

Однако эта функция возрастает или убывает на всей числовой прямой (она линейная!) и периодической быть не может.

Пример 8. *Доказать непериодичность функции* $f(x) = \sin\ln(x^2+1)$.

Вычислим производную этой функции:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}\cos\ln(x^2+1)$$

и рассмотрим функцию

$$g(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x}{x^2+1}\cos\ln\frac{x^2+1}{x^2}.$$

Легко видеть, что $|g(x)| \leqslant \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leqslant 2|x|$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Поскольку функция $f'(x)$ определена на всей числовой прямой и отлична от постоянной, по свойству VI она не периодична. Поэтому по свойству V и сама функция $f(x)$ не является периодической.

Упражнения

Определите, являются ли периодическими следующие функции:

1. $f_1(x) = \{x\} + \cos 2x$, $f_2(x) = \{x\} + \sin\pi x$.
2. $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f_2(x) = 2\pi^x - 3e^x$.
3. $f_1(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$, $f_2(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1})$.
4. $f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 - 5\sin x$, $f_2(x) = (x^4 - 2x + 5)e^{-x}$.
5. $f_1(x) = \sqrt{|\cos(x^2)|}$, $f_2(x) = x\sin x$.
6. $f(x) = \sin\sqrt{|x|}$.
7. $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \end{cases}$

   $f_2(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$

   $f_3(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$
8. $f_1(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 1}{x^4 + 3x^3 - 2x + 10}$,

   $f_2(x) = \dfrac{x^6 - 3x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^4 + 2x^3 - 4x + 1}$.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В этом номере журнала мы публикуем образцы вариантов письменного экзамена по математике, предлагавшихся поступающим на некоторые естественные факультеты МГУ в 1976 году. (Варианты механико-математического, физического факультетов и факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ будут опубликованы в одном из следующих номеров журнала.) Напоминаем читателям, что вступительные экзамены на естественных факультетах Московского университета проводятся в июле.

Географический факультет

1. Большой насос перекачивает за час на 2 $м^3$ воды больше, чем средний, а средний — на 2 $м^3$ больше, чем малый насос. Два средних и два малых насоса, работая вместе, наполнили резервуар емкостью 48 $м^3$. Сразу после этого были включены два средних и два больших насоса, которые наполнили другой резервуар той же емкости. На всю работу затрачено 9 часов. Сколько кубометров воды перекачивает в час средний насос?

2. Решить уравнение
$$4\sqrt{x+2}=|x+1|+4.$$

3. Решить уравнение
$$1-\sin 2z=\cos z+\sin z.$$

4. Решить неравенство
$$\log_{\log_2\left(\frac{1}{2}x\right)}(x^2-10x+22)>0.$$

5. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. На продолжениях боковых сторон AB и CD за меньшее основание BC трапеции отложены отрезки BM и CN так, что получается новая трапеция $BMNC$, подобная трапеции $ABCD$. Найти площадь трапеции $ABCD$, если площадь трапеции $AMND$ равна S, а сумма величин углов CAD и BDA равна $60°$.

Геологический факультет (отделение общей геологии)

1. Найти все решения уравнения
$$2\log_{10}x=5+\log_x 1000.$$

2. В рудном карьере имеются два транспортера для подъема породы. В начале рабочего дня в карьере было 20 $м^3$ породы. Сначала работал только первый транспортер и поднял 2/5 части всей породы. Затем его выключили и одновременно включили второй транспортер, который поднял всю остальную породу. В результате вся работа была завершена за 4 часа 20 минут. Если бы с начала и до конца работали одновременно оба транспортера, то на подъем всей породы потребовалось бы 2 часа. Определить производительность (количество поднимаемой в час породы) каждого транспортера, если известно, что у первого транспортера она больше, чем у второго.

3. Найти все решения уравнения
$$-3\frac{|1-\cos x|}{1-\cos x}\sin x=\sin x-2\sin 2x.$$

4. Найти все решения системы уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{-1-x}-\sqrt{2y-x}=1,\\ \sqrt{1-2y}+\sqrt{2y-x}=4.\end{cases}$$

5. В параллелограмме $ABCD$ известны длины диагонали $|BD|=\sqrt{10}$ и сторон $|AB|=3$, $|BC|=1$. Окружность, лежащая в плоскости параллелограмма $ABCD$, радиуса $\sqrt{31/2}$ с центром в точке B пересекается со второй окружностью, которая проходит через точки A и C. Известно, что касательные, проведенные через одну из точек пересечения этих окружностей, взаимно перпендикулярны. Найти радиус второй окружности.

Геологический факультет (отделение геофизики)

1. К резервуару объема 24 $м^3$ подведены две трубы. Через первую трубу вода может только выливаться со скоростью 2 $м^3/ч$, а вторая труба может только наполнять резервуар. Вначале, когда резервуар был пуст, одновременно открыли обе трубы. После того как резервуар оказался наполненным наполовину, первую трубу закрыли, а вторая продолжала наполнять резервуар. В результате резервуар был заполнен за 28 часов 48 минут. Какое количество воды в час подает вторая труба?

2. Найти все решения системы уравнений
$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}(3\cos 2x-6\,\mathrm{ctg}\,y+2)=0,\\ 18\sin^2 x-2\,\mathrm{tg}\,y-3=0.\end{cases}$$

3. Найти все решения неравенства
$$\frac{1}{2}\log_{3+x^2}(x^2-6)^2<2+\frac{1}{12}\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{64}.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ со стороной $|AD|=12$ и диагональю $|AC|=16$ проведен отрезок EF, соединяющий точку E стороны BC с точкой F диагонали BD. Точки E и F выбраны таким образом, что

$$\frac{|EC|}{|EF|}=\frac{1}{4}, \quad \frac{|FD|}{|BF|}=\frac{1}{3}.$$

Известно, что точка M пересечения диагонали AC с отрезком EF делит этот отрезок в отношении $\frac{|EM|}{|MF|}=\frac{1}{3}$. Найти длины стороны AB и диагонали BD.

5. Найти все числа p, при которых существует единственное число x, удовлетворяющее одновременно следующим условиям: $\sin \pi x=0$, $(2x+14p^2-7)(4x-4p^2-15)\leqslant 0$.

Факультет почвоведения

1. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Они двигались без остановок с постоянной скоростью и встретились через 30 часов после выхода. Найти, сколько времени был в пути до пункта назначения каждый поезд, если первый поезд прибыл в пункт B на 25 часов позже, чем второй прибыл в пункт A.

2. Дана равнобедренная трапеция, у которой длина верхнего основания вдвое меньше длины нижнего. Определить, в каком отношении делит нижнее основание прямая, которая параллельна диагонали, проходит ниже нее и отсекает треугольник площадью в 4 раза меньше площади трапеции.

3. Решить уравнение

$$2(\sin^2 2x+1)=\sin 8x+6\cos^2 2x.$$

4. Найти все значения параметра α, при которых сумма квадратов корней уравнения

$$x^2+x\cos\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{2}-1=0$$

на $\sqrt{2}/2$ больше, чем бо́льший корень уравнения

$$x^2-x(3+\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha+2=0.$$

5. Решить неравенство $\log_{x-1}(1+2x^3-x^6)<0$.

Биологический факультет

1. Решить уравнение

$$|\cos x-\sin x|=1+\sin 2x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_x \frac{1}{7}+\log_{\frac{1}{7}} x>10\left|\log_{\frac{1}{7}} x\right|.$$

3. Имеются два водных раствора № 1 и № 2 веществ A и $Б$, различающиеся весовыми соотношениями веществ A, $Б$ и воды. В растворе № 1 вещества $Б$ в 4 раза больше, чем вещества A, а воды столько же, сколько вещества $Б$. Смешав 3 *кг* раствора № 1, 6 *кг* раствора № 2 и добавив 1 *кг* воды, получим новый раствор, в котором вещества A в 2 раза меньше, чем вещества $Б$, и в 3 раза меньше, чем воды. Требуется определить весовое соотношение веществ A, $Б$ и воды в растворе № 2.

4. В равнобедренную трапецию вписана окружность с центром O_1. Другая окружность с центром O_2, расположенным вне вписанного круга, касается большего основания и боковой стороны трапеции. Обе окружности пересекаются и имеют общую хорду MN. Известно, что $\widehat{MO_1N}=60°$, $\widehat{MO_2N}=120°$, $|MN|=2$. Найти площадь трапеции.

5. Доказать, что уравнение $2x-x^2=\frac{2}{x}$ не имеет положительных решений.

Химический факультет

1. Три экскаваторщика получили задание вырыть три одинаковые канавы. Первый и второй экскаваторщики приступили к работе одновременно. Третий начал работу, когда второй вырыл пятую часть своей канавы, а закончил, когда первому оставалось вырыть четвертую часть своей канавы. Производительность второго экскаватора на 2 *м/ч* меньше, а производительность первого — на 4 *м/ч* меньше, чем производительность третьего экскаватора. Найти производительность третьего экскаватора.

2. Решить неравенство

$$2x^2-|x|\log_3 78+\log_3 26<1.$$

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Величины углов ADB, BAD, ABD, ACB в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины C, если известно, что $|AB|=1$.

4. Найти все решения уравнения

$$4-2\sin x-3\cos x=$$
$$=4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}(2-\sin x-2\cos x),$$

которые одновременно являются и решениями уравнения

$$2\sin x=\operatorname{ctg} x+3\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}$$

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, где $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ и $[DD']$ — параллельные ребра, плоскость π проходит через диагональ $A'C'$ грани куба и через середину ребра AD. Найти расстояние от середины ребра AB до плоскости π, если длина ребра куба равна 3.

Задачи и олимпиады

В 1976 году издательство «Мир» выпустило в свет перевод еще одной замечательной книги: И. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани «Венгерские математические олимпиады» (серия «Задачи и олимпиады»).

Венгрия — это первая страна, в которой (по решению Венгерского физико-математического общества) начали проводиться олимпиады по математике для выпускников гимназий. Первая олимпиада состоялась в 1894 году. С тех пор олимпиады в Венгрии проводятся ежегодно (за исключением периода двух мировых войн).

В книге «Венгерские математические олимпиады» собраны задачи всех олимпиад вплоть до 1974 года (на каждой олимпиаде участникам предлагалось по три задачи).

Первые 93 задачи (до 1928 года) были собраны и изданы с решениями одним из организаторов олимпиад — Кюршаком. Задачи олимпиад 1928—1963 годов были собраны венгерскими математиками Хайошем, Нейкоммом и Шурани. И, наконец, задачи олимпиад самых последних лет (включая 1974 год) собрал переводчик книги Ю. А. Данилов.

Книга состоит из трех разделов. Первый раздел — это просто условия 222 олимпиадных задач (чтобы вы смогли оценить эти задачи, ниже мы приводим некоторые из них). Второй раздел — это *«Решения»*. Ко многим задачам решение дается не одно, а несколько; зачастую решения превращаются в небольшие заметки-исследования. Наиболее же интересные и трудные задачи, возникающие на «стыке» школьной математики и математики «неэлементарной», обсуждаются дополнительно — в третьем разделе книги, названном *«Немного истории»*. В этом разделе затрагиваются самые разные вопросы. Здесь читатель познакомится с теорией чисел (вопросами делимости, теорией сравнений, с задачами о простых числах, числами Ферма и совершенными числами, с Малой и Великой теоремами Ферма); комбинаторикой; узнает о сравнении мощностей бесконечных множеств и о гипотезе континуума. Познакомится с алгеброй многочленов, с алгебраическими и трансцендентными числами, найдет большой раздел, посвященный неевклидовой геометрии и одному из ее создателей — Яношу Бойяи, много теорем и задач геометрии треугольника, теорем о суммировании и перестановке членов бесконечных рядов, задач на графы, целочисленные решетки и т. д.

Мы советуем всем старшеклассникам, любящим математику и трудные задачи, готовящимся к олимпиадам или уже неоднократно побеждавшим в них, — постараться купить эту книгу. Даже если вы не сможете решить какие-то задачи, прочтя решения, вы узнаете много важного и полезного. А теперь — несколько задач. Первая задача предлагалась на самой первой олимпиаде — в 1894 году.

Олимпиада 1894 года (№ 1)

Доказать, что выражения $2x+3y$ и $9x+5y$ делятся на 17 при одних и тех же целых числах x и y.

Олимпиада 1901 года (№ 22)

Доказать, что сумма n-х степеней $1^n+2^n+3^n+4^n$, где n — целое положительное число, делится на 5 в том и только том случае, если показатель степени n не делится на 4.

Решение этой задачи основано на том, что $1^4\equiv2^4\equiv3^4\equiv4^4\equiv1 \pmod 5$. Эта цепочка сравнений — не что иное, как частный случай *Малой теоремы Ферма*:

Если a — целое число, не делящееся на простое число p, то $a^{p-1}\equiv1 \pmod p$.

Олимпиада 1924 года (№ 82)

Даны три целых положительных числа a, b и c. Доказать, что если при всех целых положительных n можно построить треугольники со сторонами длины a^n, b^n, c^n, то все построенные треугольники будут равнобедренными.

Олимпиада 1926 года (№ 90)

Окружность катится без проскальзывания по окружности вдвое большего радиуса, оставаясь внутри нее. Какую линию описывает при этом произвольная точка окружности?

Решить эту задачу вам поможет знакомство со статьями С. Верова о рулеттах (см. «Квант», 1975, № 5, 8 и 12). Ответ здесь такой: диаметр большей окружности, проходящий через точку, в которой ее касается меньшая окружность в начальный момент, проходимый дважды — в прямом и обратном направлениях.

Олимпиада 1933 года (№ 110)

На шахматной доске пометили 16 из 64 клеток, причем так, что на каждой из 8 горизонталей и каждой из 8 вертикалей оказалось по 2 помеченные клетки. Доказать, что на помеченных клетках можно расставить 8 черных и 8 белых фигур (по одной фигуре на каждой помеченной клетке) так, чтобы на каждой горизонтали и каждой вертикали стояло по 1 белой и 1 черной фигуре.

Оказывается, эту задачу можно перевести на язык теории графов, с использованием теорем которой (все необходимые сведения сообщаются в решении) она легко решается. При этом удается решить даже более общую задачу о расстановке черных и белых фигур на шахматной доске размером $m \times n$, и другие задачи.

Олимпиада 1935 года (№ 116)

Точка O называется центром симметрии точечного множества H, если точка, симметричная относительно O любой точке множества H, также принадлежит множеству H. Доказать, что конечное точечное множество не может иметь двух различных центров симметрии.

Для этой задачи приводятся два решения; во втором решении показывается, что точечное множество с двумя центрами симметрии — бесконечно и имеет бесконечно много центров симметрии: — все точки, расположенные на прямой, проходящей через данные два центра симметрии, и отстоящие от концов этого отрезка на расстояния, равные целым кратным его длины.

Олимпиада 1937 года (№ 122)

Три окружности в пространстве попарно касаются друг друга, причем все три точки касания различны. Доказать, что эти окружности лежат либо на одной сфере, либо в одной плоскости.

Олимпиада 1947 года (№ 144)

Круг радиуса r покрывают кругами радиуса r/2. Какое наименьшее число кругов требуется для этого?

Ответ. семь.

Олимпиада 1966 года (№ 196)

Существует ли пространственный пятиугольник, все стороны которого равны, а углы между двумя любыми смежными сторонами прямые?

Оказывается, такого пятиугольника нет. Пространственный пятиугольник можно построить, если, например, отказаться от условия равенства всех его сторон, а только потребовать, чтобы равными были лишь четыре стороны, и чтобы углы между любыми двумя смежными сторонами были прямыми. Или же, наоборот, оставить условие равенства всех сторон, но потребовать, чтобы лишь четыре угла между смежными сторонами были прямыми — такой пространственный пятиугольник тоже существует. Если же в задаче спрашивать о существовании пространственного многоугольника с большим числом сторон (а не о пятиугольнике), то ответ будет утвердительным.

Олимпиада 1967 года (№ 200)

Выпуклый многоугольник разделен на треугольники своими непересекающимися диагоналями. Все вершины многоугольника служат вершинами нечетного числа таких треугольников. Доказать, что число сторон многоугольника делится на 3.

Требование выпуклости в этой задаче на самом деле не существенно. Оно включено лишь для облегчения задачи; иначе нужно доказать дополнительно, что всякий многоугольник можно разбить на треугольники непересекающимися диагоналями, — что сделать отнюдь не просто.

Олимпиада 1968 года (№ 204)

Расположим в ряд произвольным способом n черных и n белых шариков. Подсчитаем число перемен цвета в каждом таком расположении, то есть определим, сколько раз черные и белые шарики оказываются рядом.

Доказать, что расположений, в которых шарики различных цветов $n-k$ раз оказываются рядом, столько же, сколько расположений с $n+k$ парами разноцветных «соседей» $(0 < k < n)$.

Олимпиада 1971 года (№ 211)

Прямая пересекает сторону AB треугольника ABC в точке C_1, сторону AC в точке B_1 и продолжение стороны BC в точке A_1. Пусть C_2 — точка, расположенная симметрично точке C_1 относительно середины стороны AC, и A_2 — точка пересечения прямых B_1C_2 и BC.

Доказать, что

$$\sin \widehat{B_1A_1C} : \sin \widehat{C_2A_2B} = |B_2C_2| : |B_1C_1|.$$

Олимпиада 1972 года (№ 215)

В классе учится одинаковое число мальчиков и девочек (всего класс насчитывает не менее 4 человек). Их в различном порядке выстраивают в один ряд и смотрят, нельзя ли разделить ряд на две части так, чтобы в каждой части девочек и мальчиков было поровну. Пусть a — число случаев, когда такое разбиение ряда невозможно, а b — число случаев, когда удается разбить ряд на две части с одинаковым числом девочек и мальчиков в каждом из них, но лишь одним способом. Доказать, что $b = 2a$.

Олимпиада 1973 года (№ 219)

В пространстве задано n плоскостей $(n \leqslant 5)$ так, что любые три из них имеют ровно одну общую точку и в пространстве нет точек, через которые проходило бы более трех плоскостей. Доказать, что среди частей, на которые эти n плоскостей делят пространство, имеется не менее $\frac{2n-3}{4}$ тетраэдров.

Аналог утверждения задачи на плоскости гораздо более прост: *если на плоскости задано n прямых, расположенных так, что никакие две из них непараллельны и никакие три не проходят через одну и ту же точку, то среди частей, на которые эти прямые делят плоскость, имеется не менее $(2n-2)/3$ треугольников.*

Олимпиада 1974 года (№ 221)

Дана бесконечная последовательность квадратов со сторонами длиной 1, $^1/_2$, $^1/_3$, ..., $^1/n$, ... Доказать, что существует квадрат, в котором можно разместить все квадраты последовательности так, чтобы они не перекрывали друг друга, и определить, чему равна сторона наименьшего из квадратов, вмещающих все квадраты данной последовательности.

Все квадраты, образующие заданную бесконечную последовательность, можно разместить в квадрате со стороной $1^1/_2$.

И. Клумова

Объявляют прием

Всесоюзная заочная математическая школа

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1977 года. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Срок обучения — три года.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения этих задач не позднее 20 марта 1977 года. После проверки работ (примерно в июле 1977 года) будет сообщено, приняты ли вы в школу. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и в рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для того чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются и рецензии на них не выдаются.

В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14 *см*$\times$$\times$6 *см* с вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать вам ответ).

На обложку тетради наклейте листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет):

Область	*Вологодская*
Фамилия, имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1963 г.*
Класс	*7-й класс «А»*
Школа (полное название)	*школа № 2 г. Тотьмы*
Фамилия, имя, отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*отец — шофер автобазы № 3, мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес	*123456, г. Тотьма, ул. Ленина д. 3, кв. 23*

Результаты проверки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Школьники, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, присылают работы по адресу: г. Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61. Специнтернат при ЛГУ, ЗМШ. На конкурс.

Учащиеся, проживающие в Воронежской, Белгородской, Тамбовской, Курской и Липецкой областях, присылают работы по адресу: г. Воронеж, Университет, ЗФМШ. На конкурс.

Школьники, проживающие в остальных областях РСФСР и в других союзных республиках, должны присылать работы по адресу: 117234, г. Москва, В — 234, МГУ мех.-мат, ВЗМШ. На конкурс.

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1977 году

1 В равенстве двух дробей, числители и знаменатели которых двузначные числа, цифры заменены буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными

$$\frac{КУ}{РЕ} = \frac{КА}{КУ}$$

Какую цифру означает каждая из букв (достаточно привести все возможные ответы)?

2 Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите множество точек M, для которых

$$|MA| + |MB| = |MC| + |MD|.$$

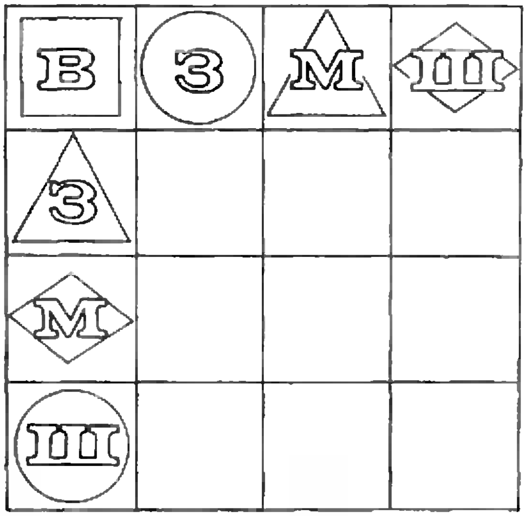
3 Дополните табличку 4×4 (см. рисунок) буквами В, З, М, Ш, обведите их рамками четырех типов (квадрат, ромб, круг, треугольник) и раскрасьте их в четыре цвета так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) в каждой строчке и в каждом столбце должны встречаться все буквы, цвета и типы рамок, 2) каждая буква должна быть раскрашена по разу каждым цветом, 3) рамка каждого типа должна содержать каждую букву и каждый цвет. (Достаточно нарисовать требуемую картинку.)

4 В прямоугольном треугольнике a и b — длины его катетов, c — длина гипотенузы, h — длина высоты, опущенной на гипотенузу. Докажите, что $c + h$ больше $a - b$.

5 Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y + z, \\ y^2 = z + x, \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

6 Даны две непересекающиеся окружности. Существует ли вне окружностей такая точка, что всякая прямая, проходящая через нее, пересекает хотя бы одну из окружностей?



7 Автомобиль и велосипедист выехали одновременно из A в B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся лишь тогда, когда автомобилю оставалась треть пути до B. Автомобиль, доехав до B, без остановки поехал обратно в A. Кто приедет раньше: автомобиль в A или велосипедист в B?

8 Известно, что числа 2077 и 100 при делении на натуральное число a дают одинаковые остатки. Найдите число a.

9 Большой прямоугольник разбит на клетки 1 *см*×1 *см*. Внутри каждой клетки написано число. Известно, что сумма всех чисел в каждой горизонтальной строчке равна 1, а в каждом вертикальном столбце — равна 2. Может ли площадь прямоугольника равняться 1976 *см*²?

10 Несколько ящиков весят вместе 10 тонн, причем каждый из них весит не больше одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?

Ж. Раббот

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8-й, 9-й и 10-й классы на 1977/78 учебный год.

Форма обучения в нашей школе отличается от привычной для ребят работы с учителем на уроках. Заочное обучение прививает навыки самостоятельности, учит работать с дополнительной литературой, конспективно излагать свои мысли.

За 10 лет работы ЗФТШ дала хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых стали студентами ведущих вузов нашей страны.

Цель нашей школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по физике и математике. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где помощь нашей школы особенно нужна.

В ЗФТШ принимаются и физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это — и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися г. Москвы проводятся очные занятия по физике и математике 2 раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ.

Вступительное задание каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью. Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет.

На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

1. Область (край или АССР)	*Кемеровская обл.*
2. Фамилия, имя, отчество	*Глухов Валерий Иванович*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*школа № 6, ул. Шишкина, 26*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*слесарь, мастер цеха*
мать	*бухгалтер*
6. Подробный домашний адрес	*623023, г. Прокопьевск, ул. Урожайная, д. 11, кв. 20*

Срок отправления решения — не позднее 10 марта 1977 года (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу будет проводиться приемной комиссией Московского физико-технического института и приказом директора ЗФТШ. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1977 года.

Тетради с выполненными заданиями присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся 7-х классов, задачи 1, 4—8 — для учащихся 8-х классов, задачи 1, 6, 8 — 12 — для учащихся 9-х классов. Во вступительном задании по математике задачи 1—5 — для 7-х классов, 4—10 — для 8-х классов, 7—13 — для 9-х классов.

Задачи вступительной контрольной работы в ЗФТШ в 1977 году

Физика

1. Не прибегая к взвешиванию на весах, определить среднюю плотность куриного яйца.

2. Найти среднюю скорость поезда, если известно, что на прохождение отдельных участков дистанции, длины которых относятся как 1:3:4:2, потребовались промежутки времени, находящиеся в отношении 2:4:3:1, и на последнем участке скорость равнялась 80 *км/час*.

3. Сообщающиеся сосуды в виде цилиндрических трубок длиной 10 *см*, площади поперечных сечений которых отличаются вдвое, соединены внизу резиновым шлангом и наполнены водой до половины высоты. В узкую трубку поместили цилиндрик изо льда высотой 10 *см*. На сколько изменились при этом уровни воды в сосудах, если площадь поперечного сечения цилиндра изо льда практически не отличается от площади поперечного сечения узкой трубки?

4. Горючее получено смешиванием равных объемов бензина и спирта. Какое количество теплоты выделится при сгорании 1 *кг* такой смеси?

5. Через раствор азотнокислого серебра пропускают постоянный электрический ток сначала силой 200 *а* в течение 5 *час*, а затем силой 150 *а* в течение 8 *час*. Какова масса выделившегося из раствора серебра, если

при прохождении одного кулона электричества выделяется 1,118 *мг* серебра?

6. Используя известные экспериментальные данные, оценить среднюю плотность Солнца.

7. После скатывания с горы санки начинают двигаться по горизонтальному участку дороги со скоростью 2 *м/сек*. Коэффициент трения между полозьями санок и дорогой равен 0,02. Какой путь пройдут санки за 15 *сек*?

8. Пассажиры не испытывают неприятных ощущений, если только их вес в полете не увеличивается более чем вдвое. Какое максимальное ускорение в горизонтальном полете допускает это условие?

9. Маятнику массы 1 *кг* сообщили такой толчок, что он совершил полный оборот в вертикальной плоскости. В верхнем положении маятника натяжение нити оказалось вдвое меньше силы натяжения в состоянии покоя, когда груз спокойно висит на нити. Каково натяжение нити в момент прохождения маятником положения равновесия?

10. Вода нагревается электрокипятильником постоянной мощности. На что потребуется больше времени — нагреть воду от 10 до 20 или от 80 до 90° С?

11. Под тяжелый поршень, который может скользить без трения внутри вертикально расположенного откачанного цилиндра, вводится некоторое количество смеси аргона и водорода. В результате поршень смещается вверх и располагается на высоте, составляющей $^2/_3$ от высоты цилиндра, считая от его дна. Однако с течением времени поршень перемещается вниз, так как материал, из которого изготовлен поршень, оказывается проницаемым для водорода. Окончательно поршень располагается на высоте, равной $^1/_4$ высоты цилиндра. Найти отношение масс аргона и водорода в смеси.

12. Конденсатор емкости 1 *мкф*, заряженный до напряжения 44 *в*, подключается через очень большое сопротивление к батарее с э. д. с. 220 *в* так, что положительно заряженная обкладка конденсатора подсоединена к отрицательному полюсу батареи. Определить количество теплоты, которое выделяется в цепи при зарядке конденсатора до напряжения 220 *в*.

Математика

1. Бак вмещает 1000 литров воды. Каждый день расходуют 600 литров, а ночью доливают в бак половину того количества, что находилось в баке утром. В понедельник утром бак был полон. Хватит ли воды в баке в четверг?

2. Существуют ли такие натуральные значения k, m, n, для которых справедливо равенство

$$(2k+1)^2-(2m+1)^2=4\,(2n+1).$$

3. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, разделяет его на равновеликие фигуры. В каком отношении эта прямая делит две другие стороны треугольника?

4. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) для делимости n^2-1 $(n\geq 5)$ на 24 д о с т а т о ч н о, чтобы n было простым числом;

б) для делимости n^2-1 $(n\geq 5)$ на 24 н е о б х о д и м о, чтобы n было простым числом.

5. Ученикам всем поровну раздали тетради. Если бы учеников было на несколько человек меньше, то каждый получил бы 18 тетрадей, а если бы их было больше на то же количество, то некоторые получили бы по 4 тетради, а остальные — по 5 тетрадей. Сколько тетрадей получил каждый ученик?

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Первая окружность проходит через центр второй. Хорда BD первой окружности пересекает вторую окружность в точке C, которая делит дугу ACB так, что $\smile AC : \smile CB = 1:2$. В каком отношении точка D делит дугу ADB?

7. Найдите четыре числа, первые три из которых составляют арифметическую прогрессию, а последние три — геометрическую прогрессию, если известно, что сумма крайних чисел равна 4, а сумма средних равна 2.

8. В ромбе $ABCD$ угол BAD острый. Окружность, вписанная в этот ромб, касается сторон AB и CD соответственно в точках M и N и пересекает $[CM]$ в точке P, а $[BN]$ в точке Q. Определите $|BQ|:|QN|$, если $|CP|:|PM|=9:16$.

9. Даны два утверждения:

а) *уравнение* $x+\sqrt{x}=a$ *не имеет решений;*

б) *неравенство* $4x^2+(a-3)\,x+1\geq 0$ *справедливо при всех значениях* x.

При каких значениях a одно из этих утверждений истинно, а другое ложно?

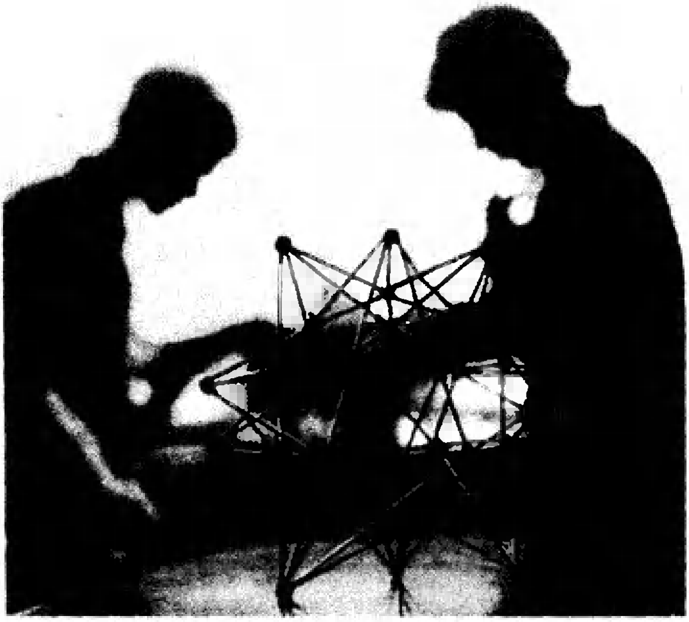
10. Колонна солдат движется с постоянной скоростью, растянувшись на 50 метров. Связной, выйдя из строя, идет с постоянной скоростью до конца колонны, затем поворачивает и доходит до начала колонны, еще раз поворачивает и идет до своего места в строю. За это время колонна продвинулась на 120 метров. Сколько метров прошел связной?

11. Спортплощадку площадью 0,9 гектара, имеющую форму прямоугольника, необходимо огородить с севера и юга деревянным забором, с востока и запада — проволочным. Установка одного метра деревянного забора обходится в 5 рублей, проволочного — в 2 рубля. На строительство выделено 1200 рублей. Достаточно ли этой суммы?

12. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_0=2$, $x_1=\dfrac{3}{2}$, $x_{n+1}=\dfrac{3}{2}x_n-\dfrac{1}{2}x_{n-1}$. Найдите формулу для x_n. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$?

13. Из пункта B идут две прямолинейные дороги: одна в пункт A, другая в пункт C, причем $\widehat{ABC}=120°$. Из A в B и из B в C одновременно выезжают два автомобиля. В тот момент, когда автомобиль, выехавший из A, прошел седьмую часть своего пути, расстояние между автомобилями стало наименьшим. Чему равно отношение скоростей автомобилей?

А. Кирьянов, А. Кутасов, Т. Чугунова



Физико-математическая школа-интернат при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова

Вот уже более 13 лет работают специализированные школы-интернаты в Киеве, Ленинграде, Москве, Новосибирске, Ереване и Тбилиси. Задача этих школ состоит в том, чтобы подросткам, живущим вдалеке от научных центров, представить те же возможности выдвижения в науку, что и ученикам университетских городов. Мы попросили председателя попечительского совета школы-интерната при МГУ академика А. Н. Колмогорова и заведующего учебной части по математическому циклу В. В. Вавилова рассказать об их школе.

Многие читатели «Кванта», наверное, видели телевизионный фильм «Спрашивайте, мальчики», который, в частности, рассказывает об интернате при МГУ. В эту школу-интернат принимаются учащиеся, хорошо окончившие восьмой класс и проживающие в Центральной Европейской части СССР, на Урале, Поволжье, Северном Кавказе и Белоруссии. Отбор будущих школьников производит приемная комиссия на основе конкурсных экзаменов по профилирующим предметам, которые устраиваются ежегодно во время проведения областных олимпиад. Сроки этих экзаменов можно узнать в областном отделе народного образования или в Министерстве просвещения соответствующей республики (для поступления в интернат участие в олимпиаде не обязательно; школьники, пропустившие по какой-либо причине экзамен, могут обратиться непосредственно в школу, ее адрес: *Москва, 121357, Кременчугская, 29, школа-интернат, приемная комиссия*).

Если мечта заниматься наукой пришла к вам только в девятом классе, то вы тоже можете принять участие в экзамене — мы принимаем и на один год в десятый класс. Правда, конкурсные требования здесь особенно высоки (на одногодичном потоке всего 60 мест).

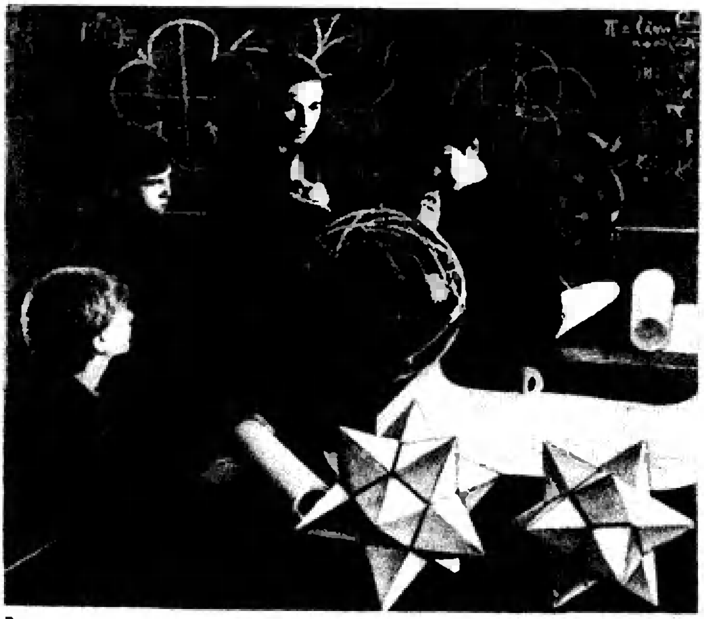
По результатам экзаменов лучшие кандидаты вызываются на летний учебный сбор (летнюю ФМШ), где производится окончательное зачисление (в 9 или 10 класс).

В ФМШ учиться нелегко: заниматься приходиться значительно больше, чем в обычной школе, нужны хорошее здоровье и большая организованность. Поступать имеет смысл только тем, кто имеет горячее желание работать в области физико-математических наук и их применений. По окончании ФМШ наши ученики чаще всего продолжают свое образование на механико-математическом или физическом факультетах МГУ, в Московском физико-техническом институте (65% выпускников интерната); в целом же около 95% наших выпускников поступают в различные университеты, технические вузы и педагогические институты.

ФМШ была задумана как школа научного творчества, а не как своеобразные курсы по подготовке к конкурсным экзаменам. Мы стремимся дать нашим питомцам навыки самостоятельного научного мышления, вооружить их всем необходимым

1. Очередной выпуск ежемесячной общешкольной стенной газеты готовят ученики 10а класса.
2. Чтобы разобраться с очередным заданием по математическому практикуму, пришлось... перекрасить глобус!
3. Перед отбоем. Графики, графики, графики...
4. ФМШ — «Футбольно-математическая школа», так расшифровывают ее название ребята. Спортом в школе увлекаются все — от учеников до директора.

1



2

3

4

для восприятия университетских курсов с полным и наглядным пониманием существа дела. Выходя за рамки обычного школьного курса, мы не дублируем, однако, университетское образование. Все это обеспечивает быстрое вхождение лучших выпускников школы в самостоятельную научную работу. Этому в школе способствуют задания по физическому и математическому практикумам, специальные курсы и семинары, кружки и консультации (в вечернее время).

Лекции в ФМШ читают профессора и доценты Московского университета. Лекций, однако, не много — в неделю два часа по математике и два часа по физике. Занятия в классах по математике и физике ведут опытные преподаватели, аспиранты и студенты МГУ (в значительной части из наших же выпускников). Сама система преподавания математики и физики в школе сильна своими традициями, создающими в школе особую атмосферу, в которой интерес к науке, спорт и любовь к природе, интерес к литературе и искусству, общественная работа — все вместе содействует воспитанию полноценного человека.

Окончательная оценка результатов работы интерната может быть получена из анализа успехов выпускников прошлых лет. Выпускники 1964—1969 годов в значительной их части окончили аспирантуру и защитили кандидатские диссертации (и пока только одну — докторскую). Ими опубликованы сотни научных работ, иногда выдающихся. Некоторые из них были приглашены рассказать о своих научных результатах на научные конференции и международные съезды.

На письменные экзамены к нам приходит несколько тысяч человек. И хотя мы не можем принять их всех, очень советуем смелее пробовать свои силы. Нашей стране крайне нужны большие ученые и просто талантливые работники науки. Не лишайте нас возможности найти их!

Приглашаем всех любителей математики и физики в нашу школу!

Голубой экран — абитуриенту-77

В сентябре 1976 года начались занятия на Московских подготовительных телевизионных курсах, созданных в 1971 году Центральным телевидением совместно с Министерством высшего и среднего специального образования СССР.
Каждый год телекурсы принимают десятки тысяч слушателей. Опыт работы курсов свидетельствует, что большинство учащихся, систематически и добросовестно занимающихся в течение учебного года, поступают в высшие учебные заведения. В этой заметке рассказывается, как будет организована работа подготовительных телекурсов в 1976/1977 учебном году.

Телевизионные занятия проводятся в течение всего учебного года по трем дисциплинам: математике, физике и русскому языку.

На телекурсах в основном принята лекционная форма работы, однако значительная часть телеуроков отводится на практические занятия, консультации и обзорные передачи.

Для закрепления знаний слушателям регулярно предлагаются домашние задания, состоящие из задач, примеров и текстов различной трудности. Как правило, задания соответствуют тематике лекций. Предлагаются они во время телепередач, а также публикуются в прессе («Говорит и показывает Москва»).

После проверки ответы на домашние задания заносятся в картотеку и с оценками возвращаются адресатам.

В 1976/77 учебном году, как и в прошлые годы, телекурсы будут проводить очные зачеты: зимой (примерно в январе — феврале) и весной (примерно в апреле — мае).

На очные зачеты вызываются слушатели, активно и систематически занимающиеся на телекурсах. Успешно сдавшие зачеты получают в конце учебного года Свидетельства об окончании телевизионных подготовительных курсов. Эти Свидетельства принимаются приемными комиссиями вузов в качестве документа, характеризующего академическую активность абитуриента.

В предстоящем учебном году слушателям будут еженедельно предлагаться две передачи по математике, две — по физике и одна — по русскому языку. Для удобства учащихся (особенно тех, кто работает в разные смены) эти телеуроки повторяются дважды в неделю, в разные дни и часы.

Расписание занятий следующее:

русский язык—премьера в среду днем (повторяется по воскресеньям утром);

математика — премьера по четвергам и пятницам в дневное время (повторяется соответственно по субботам вечером и по воскресеньям утром);

физика — как и математика — по четвергам и пятницам премьеры (соответственно по субботам и воскресеньям повторы).

В основу телевизионных лекций положена «Программа вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР» по русскому языку, математике и физике. Учтены также и изменения в школьных программах по этим предметам. Так, например, занятия по математике в течение года проводятся в соответствии с новой школьной программой по математике. Однако для тех, кто закончил школу или среднее учебное заведение раньше, с января 1977 г. вводится дополнительный курс, соответствующий старой школьной программе по математике. Премьеры этих передач будут транслироваться по понедельникам (днем), а повторы — по четвергам (вечером).

Занятия на телекурсах будут состоять из двух циклов: основного (он закончится в мае 1977 г.) и обзорно-консультационного (июнь — июль 1977 г.). На уроках второго цикла рассматриваются вопросы, вызывающие наибольшие трудности при изучении и повторении учебного материала.

Зона приема передач «Для поступающих в вузы» в 1976/77 учебном году по сравнению с прошлыми годами расширилась — дневные передачи теперь могут смотреть жители ряда областей и районов Украины, Белоруссии Литвы, Латвии, Молдавии, а также Москвы и областей РСФСР: Московской, Белгородской, Брянской, Вологодской, Воронежской, Горьковской, Ивановской, Калининской, Калининградской, Калужской, Кировской, Костромской, Куйбышевской, Курской, Ленинградской, Липецкой, Пермской, Псковской, Смоленской, Тамбовской, Тульской, Ярославской.

На подготовительные телекурсы принимаются все желающие — и уже имеющие законченное среднее образование, и учащиеся — выпускники школ, ПТУ, средних специальных заведений.

Прием на телекурсы проводится без конкурса. Обучение — бесплатное.

Для зачисления слушатель должен прислать в адрес телекурсов «Анкету-заявление», «Регистрационные карточки» и 4 конверта с маркой со своим обратным адресом (один из конвертов должен быть с марками стоимостью на 12 коп.).

«Анкета-заявление» оформляется на обычной почтовой карточке. На лицевой стороне ее напишите свой адрес, а москвичи —

фото
3×4

Р, М, Ф

АНКЕТА-ЗАЯВЛЕНИЕ

1. Фамилия, имя, отчество;
2. Год рождения;
3. Род занятий (учусь, работаю);
4. Место работы, должность, стаж (если работаете);
5. В какой вуз собираетесь поступать.

Прошу принять меня на отделение русского языка, математики и физики Московских подготовительных курсов для поступающих в вузы.

Подпись, дата.

РЕГИСТРАЦИОННАЯ КАРТОЧКА

1. Фамилия, имя, отчество;
2. Место учебы;
3. Последняя годовая оценка по математике, полученная вами в школе или среднем учебном заведении;
4. В какой вуз собираетесь поступать.

Подпись, дата.

еще номер телефона (домашнего или служебного), если он имеется. Обратная (чистая) сторона карточки заполняется ответами на вопросы анкеты, образец которой приводится.

Все записи следует делать параллельно узкой стороне карточки, чертежным шрифтом.

В правом верхнем углу проставьте буквы, соответствующие отделениям, на которых вы собираетесь заниматься. Например, если вы предполагаете заниматься на всех отделениях, то поставьте три буквы: «Р» (соответствует отделению русского языка), «М» (соответствует отделению математики), «Ф» (соответствует отделению физики). Под ответами на вопросы анкеты напишите текст заявления о приеме (см. образец) с перечислением выбранных вами отделений, поставьте подпись, дату.

Регистрационная карточка оформляется также на почтовой карточке. На лицевой стороне ее обязательно напишите свой адрес (москвичи — еще и телефон). Обратная (чистая) сторона карточки заполняется, как указано на образце. В левый верхний угол приклейте фотографию (размер 3×4 см). Надпись «Регистрационная карточка» делается на сантиметр ниже края почтовой открытки. Все записи выполняются параллельно узкой стороне карточки чертежным шрифтом. Для каждого отделения заполняется отдельная «Регистрационная карточка». В правом верхнем углу каждой карточки проставляется одна из букв — «Р», «М», «Ф», — соответствующая выбранному отделению (так, если слушатель предполагает заниматься на всех трех отделениях, то он должен оформить и прислать три «Регистрационные карточки»).

На письмах с заявлениями о приеме в адрес курсов проставляйте в левом верхнем углу те же буквы («Р», «М», «Ф»), что и в «Анкете-заявлении».

Каждому слушателю, после получения от него письма с заявлением о приеме, присваивается шифр и высылаются (в одном из присланных конвертов) «Удостоверение слушателя» и «Аннотации телевизионных занятий и методические указания к ним». В «Аннотациях» содержится программа занятий, рекомендуемая литература, методические указания к выполнению домашних заданий и правила их оформления, советы, как вести самостоятельно учет успеваемости и т. п.

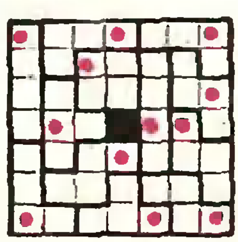
В течение учебного года в тематическом плане телезанятий могут происходить некоторые изменения, поэтому слушателям рекомендуется следить за уточненным расписанием занятий на каждую неделю, которое будет публиковаться в еженедельном обозрении программ Центрального телевидения и радиовещания «Говорит и показывает Москва».

Адрес телекурсов: 113162, Москва, Шаболовка, 37, Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Московские подготовительные телекурсы.

И. Наслузов

Укладка тетрамино

Двенадцать тетрамино расположены в квадрате 7×7 (центральная клетка квадрата не закрыта). На каждом тетрамино стоит точка. Переложите тетрамино так, чтобы точки оказались на диагоналях квадрата (а центральная клетка опять была не закрыта). Переворачивать тетрамино нельзя.



Л. Молчалов

Любая карта на плоскости может быть раскрашена в четыре цвета

Так называется заметка, появившаяся в сентябре 1976 года в журнале Американского математического общества «Bulletin of American Mathematical Society». Это сообщение обратило на себя внимание профессиональных математиков и любителей математики всего мира: знаменитая проблема четырех красок решена!

Более ста лет эта проблема дразнила воображение математиков своей формулировкой — не менее простой, чем формулировка Великой теоремы Ферма, и при этом более наглядной; работа над этой проблемой стимулировала создание столь популярной сейчас и важной для приложений теории графов.

Наш журнал неоднократно рассказывал о проблеме четырех красок*).

Вот несколько эпизодов из столетней истории этой проблемы.

1840 год. Немецкий астроном и геометр А. Мебиус доказал, что «на плоскости нельзя начертить пять областей так, чтобы каждые две из них имели общую границу». Эта нетрудная теорема — прелюдия к проблеме четырех красок.

1852 год. Английский математик Де Морган пишет своему другу и коллеге В. Гамильтону о задаче, придуманной одним из его студентов: «Любую карту на сфере можно раскрасить не более чем в четыре цвета так, чтобы любые две соседние страны были раскрашены в разные цвета». Четверть века об этой задаче никто не вспоминал.

1878 год. С трибуны Британского географического общества известный английский математик А. Кэли вновь формулирует проблему четырех красок (и добавляет, что сам вот уже несколько дней как не может решить ее — это происходило почти сто лет тому назад!).

С тех пор эта проблема (или гипотеза*) приобрела широкую и до некоторой степени нездоровую известность. «Гипотезу четырех красок можно с полным правом назвать еще «болезнью четырех красок», так как она во многом похожа на заболевание...»**) Ею «переболели» тысячи любителей и математиков, в том числе весьма известных (О. Веблен, Ф. Франклин и т. д.).

1880 год. Одна из первых «жертв» эпидемии — английский адвокат А. Кемпе публикует доказательство гипотезы четырех красок в серьезном математическом журнале, и в течение 10 лет (!) проблема считается решенной.

1890 год. П. Хивуд находит в работе Кемпе ошибку и доказывает, что любая карта на сфере может быть правильно раскрашена пятью красками («правильно» означает «так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет»). Одновременно Хивуд ставит общую задачу о раскраске карт на более сложных поверхностях, чем сфера, — на «сферах с ручками» (на торе, «кренделе» и т. п.), находит формулу для числа красок в зависимости от числа «ручек» и доказывает (как выяснилось, неверно) эту формулу. Случай тора был однако рассмотрен Хивудом до конца и безошибочно.

Хотя история доказательства формулы Хивуда растянулась на 70 лет, все же в 1968 году оно было завершено для всех поверхностей — кроме сферы! Проблема четырех красок по-прежнему казалась неприступной.

Разумеется, упомянутая выше работа американских математиков Аппеля и Хакена, доказавших знаменитую гипотезу (замечательно, что в доказательстве «принимала участие», и весьма существенное, ЭВМ), будет подвергнута учеными многих стран тщательной проверке. Мы надеемся вернуться к этой теме в будущем.

Л. Беве

---

*) См. статьи: для младших школьников — «Топологические опыты своими руками», 1974, № 2, с. 58; для школьников 7—9 классов — «Карты и раскраски», 1972, № 4, с. 33 и для десятиклассников — довольно сложную статью «Арифметика на географической карте», 1974, № 4, с. 23.

*) Гипотеза состоит в том, что карту можно раскрасить, проблема — в том, чтобы решить, верна ли гипотеза.

**) Ф. Харари. Теория графов. Перев. с англ., изд-во «Мир», М., 1973, с. 151.

К статье «Цикл Карно»

1. $\Delta U = \frac{3}{2} R\Delta T = -2{,}5\cdot 10^5$ *дж*.

2. $\Delta U = cm\Delta T = 10^{21}$ *дж*.

3. На графике (рис. 1) заштрихованная площадь численно равна работе, совершаемой при изменении объема газа от 20 до 40 *л*. В выбранном масштабе площадь каждой клетки равна 100 (*л·атм*). Так как 1 *л·атм* $\approx 10^{-3}$ *м*$^3\cdot$101 325 *н/м*$^2\approx$100 *дж*, то площадь одной клетки соответствует работе $\approx 10^4$ *дж*. Площадь заштрихованной фигуры примерно равна 4,25 клетки. Следовательно, при изменении объема газа от 20 до 40 *л* совершается работа $A\approx 4{,}25\cdot 10^4$ *дж*.

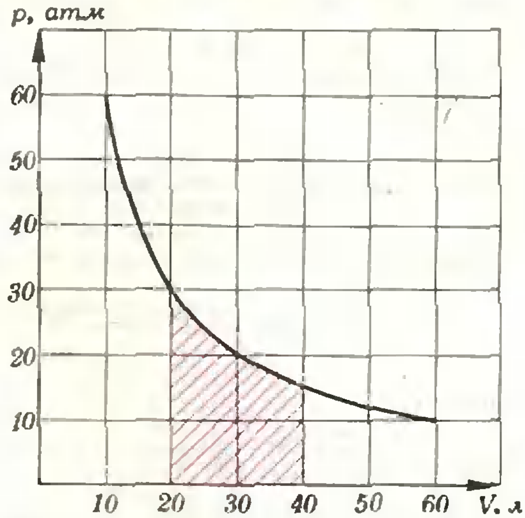


Рис. 1.

4. В процессе AB_1 работа не совершается, внутренняя энергия газа увеличивается.

В процессе AB_2 совершается работа и увеличивается внутренняя энергия газа.

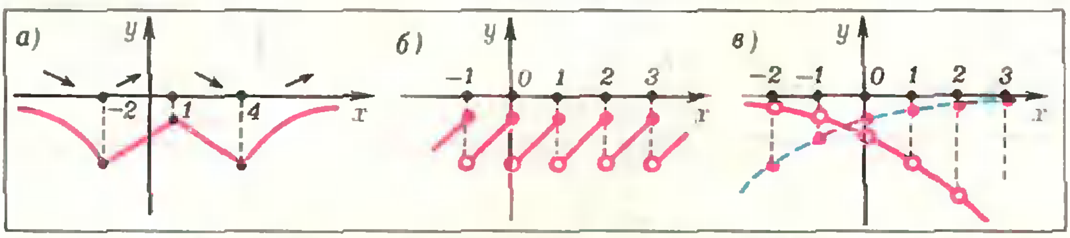


Рис. 2.

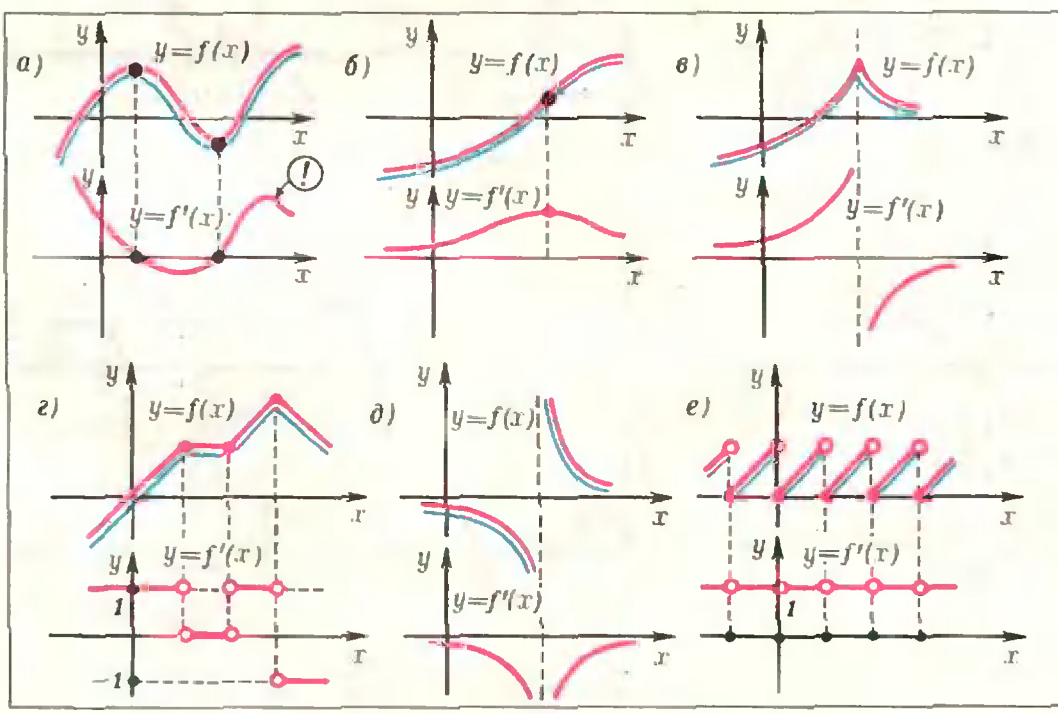


Рис. 3.

В процессе AB_3 совершается работа, внутренняя энергия газа не изменяется.

5. Нагретая поверхность Земли — нагреватель, восходящий поток воздуха — рабочее тело, верхние слои атмосферы — холодильник.

К статье «17 задач по анализу (пределы, непрерывность, монотонность, производная)»

1. Предел существует только в случае *в*).
2. Доопределить функцию так, чтобы существовал нужный предел, можно только в случаях *а*) и *г*).
3. *г*) Такова, например, функция $y=[x]$ (целая часть x).
4. Функции с графиками *б*) и *г*) разрывны в точке $x=x_0$; функция с графиком *б*) разрывна еще и в точке $x=x_1$; функция с графиком *а*) разрывна только в точке $x=x_1$.
5. В случаях *б*) и *г*) функцию f нельзя доопределить до всюду непрерывной.
6. *а*), *б*), *г*) — да; *в*) и *д*) — нет.
7. в) Промежуток возрастания $[0,2]$, убывания — $[2, 3]$.
8. В случае а): 1) нет (пример: $y=[x]-x$); 2) да; в случае б): 1) и 2) — да.
9. На рисунках 2,*а* — *в* изображены графики всюду отрицательных функций, удовлетворяющих условиям задачи.
10. Б) Можно.
11. *а*) Две точки максимума и две — минимума.
б) x_0 — точка максимума.
в) Точек экстремума нет.
г) x_0 — точка максимума.
д) x_0 — точка минимума.
е) x_0 — точка максимума.
ж) При целых n в точках $x=2n$ — максимум, в точках $x=2n+1$ — минимум.
з) Одна точка максимума и одна — минимума (кроме того, целый отрезок точек *нестрогого* минимума).
12. Графики производных $y=f'(x)$ под данными графиками функций $y=f(x)$ изображены на рисунках 3,*а* — *е*.
13. Конечно, разные функции могут иметь одну и ту же производную: если $g(x)=f(x)+c$, где c — постоянная, то, очевидно, $g'(x)=f'(x)$. Более подробно по этому поводу см. в п. 98 учебника «Алгебра и начала анализа 10». Примерные графики функций $y=f(x)$, имеющих данные графики производных $y=f'(x)$, изображены на рисунках 4,*а* — *е*.
14. а): 1) нет, 2) да;
б): 1) нет, 2) да;
в) да.

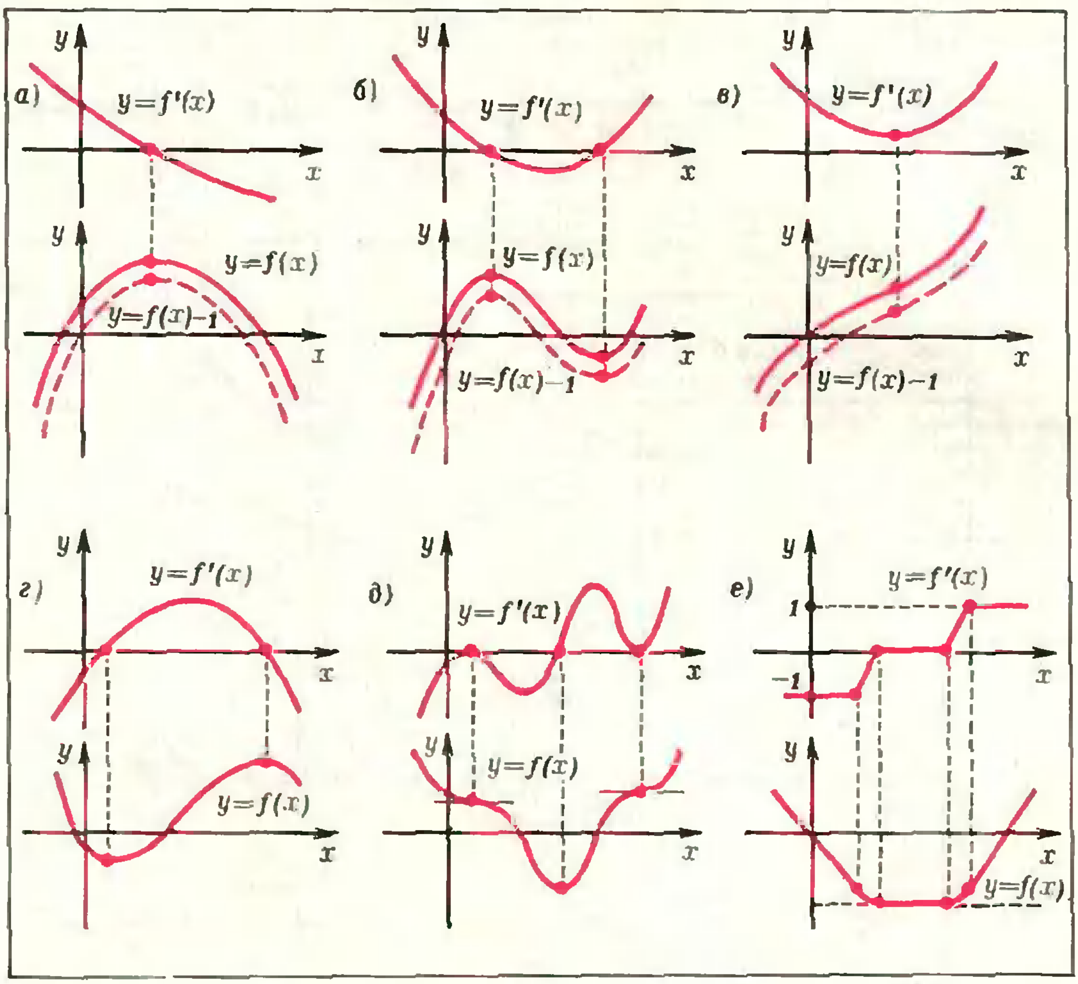


Рис. 4.

15. а): 1) и 2) — да (примеры: $y=10^{-x}$ и $y=10^x$)

б) да (пример: $y=x+\sin x$);

в) 1) да (пример: $y=x^3+17$), 2) нет.

16 А). а) $a>0$, $b>0$, $c>0$; б) $a>0$, $b<0$, $c<0$;

в) $a<0$, $b>0$, $c<0$; г) $a<0, b<0$, $c>0$.

Б). Ответ: *нет*. Указание: рассмотрите производную функции $y=ax^3+bx^2+c$.

17. а) 4; б) 5; в) 8.

К статье «Периодичность и непериодичность функций»

1. $f_1(x)$ — непериодическая, $f_2(x)$ — периодическая.

2. Нет. Указание. Решить уравнение $2\pi x=3ex$.

3. Указание. Убедиться, что $f_1'(x)>0$. Доказать, что $f_2(x)=0$, $x\in\mathbf{R}$.

4. Указание. Функция $f_1(x)$ — неограниченная. Вычислить функцию $g_1(x)=f_2(x)+f_2'(x)$, а затем — функцию $g_2(x)=g_1(x)+g_1'(x)$; решить уравнение $g_2(x)=0$.

6. Нет. Указание. Рассмотреть уравнение $f(x+T)=f(x)$ при $x=0$ и $x=\pi^2$.

7. Указание. Решить уравнения $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $f_3(x)=0$.

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Географический факультет

1. 3 $м^3$. 2. $x_1=-1$, $x_2=7$. 3. $z_1=2k\pi$, $z_2=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ (k и n — целые). 4. $3<x<5-\sqrt{3}$, $x>7$. Указание. Величина $\log_2\left(\frac{1}{2}x\right)$ может принимать значения как большие, так и меньшие единицы. 5. $\frac{4}{5}S$. Указание. Доказать, что вокруг трапеции $ABCD$ можно описать окружность.

Геологический факультет (отделение общей геологии)

1. $x_1=10^{-1/3}$, $x_2=10^3$. 2. Производительность первого транспортера 6 $м^3/ч$, второго — 4 $м^3/ч$. 3. $x=\pi+2k\pi$ (k — целое). 4. $x=-49+24\sqrt{3}$, $y=-6+2\sqrt{3}$. Указание. Переписать первое уравнение в виде

$$\sqrt{-1-x}=1+\sqrt{2y-x}$$

и, возведя в квадрат, получить равенство $-1-x=y^2$. Затем, сложив данные уравнения, прийти к уравнению

$$\sqrt{y^2}+\sqrt{1-2y}=5$$

и заметить, что его корни должны удовлетворять условию $|y|\leqslant 5$. 5. $R=\frac{1}{12}\sqrt{9970}$. Указание. Установить, что $ABCD$ — прямоугольник. Показать, что радиусы окружностей, проведенные в точку M их пересечения, взаимно перпендикулярны, а потому центр второй окружности лежит вне первого круга. Рассмотреть два случая: 1) центр O второй окружности лежит по ту же сторону от прямой AC, что и точка D (тогда применить теорему косинусов к треугольнику BSO, где S — центр прямоугольника $ABCD$, учитывая, что $\widehat{BSO}=90°+2\cdot\widehat{BAC}$, а стороны BO и SO выражаются через радиус R второй окружности из прямоугольных треугольников BMO и CSO); 2) центр второй окружности лежит по ту же сторону от прямой AC, что и точка B (доказать, что этот случай невозможен).

Геологический факультет (отделение геофизики)

1. 2,5 $м^3$. 2. $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $y=\operatorname{arctg}3+n\pi$ (k и n — целые). 3. $x<-\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}<x<-\sqrt{3/2}$, $\sqrt{3/2}<x<\sqrt{6}$, $x>\sqrt{6}$. 4. $|AB|=\sqrt{112}$, $|BD|=16$. Указание. Убедиться, что $|EM|=\frac{1}{4}|EF|$, так что $\triangle CEM$ — равнобедренный. Продолжив FE до пересечения со стороной AD в точке K, вывести из $\triangle KFD\backsim\triangle BFE$, что $|KF|=\frac{1}{3}|EF|$, а из $\triangle AKM\backsim\triangle MEC$, что $|MC|=3$. Провести через точку F прямую, параллельную стороне AB; пусть N — точка пересечения этой прямой с диагональю AC. Показать, что $|NM|=1$. Записать: теорему косинусов для треугольника MNF, выразив $\cos\widehat{MNF}$ из треугольника MEC; теорему косинусов для треугольника OMF, где O — центр параллелограмма; соотношение между сторонами и диагоналями параллелограмма.

5. $-\sqrt{\frac{3}{14}}<p\leqslant-\sqrt{\frac{1}{14}}$, $\sqrt{\frac{1}{14}}\leqslant p<\sqrt{\frac{3}{14}}$.

Указание. Получить решение заданного неравенства в виде $-7p^2+\frac{7}{2}\leqslant x\leqslant p^2+\frac{15}{4}$. Выяснить, при каких значениях p на отрезке между числами $-7p^2+\frac{7}{2}$ и $p^2+\frac{15}{4}$ лежит целое число и притом только одно. Для этого рассмотреть параболы $y_1=-7p^2+\frac{7}{2}$ и $y_2=p^2+\frac{15}{4}$ и заметить, что $y_1=3$ при $|p|=\sqrt{1/14}$, $y_1=2$ при $|p|=\sqrt{3/14}$, а $y_2=4$ при $|p|=1/2$.

Факультет почвоведения

1. Первый поезд был в пути 75 $ч$, а второй 50 $ч$. 2. $(2\sqrt{6}-3):3$. 3. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$ (k — целое).

4. $\alpha = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ (k — целое).

5. $1 < x < \sqrt{2}$. Указание. Рассмотреть отдельно случаи $0 < x-1 < 1$ и $x-1 > 1$; во втором случае доказать, что при всех $x > 2$ справедливо неравенство $x^4(x^2-2) > 1$.

Биологический факультет

1. $x = \frac{k\pi}{2}$ (k — целое). 2. $7^{-1/3} < x < 1$.

3. Весовое соотношение веществ A, $Б$ и воды в растворе № 2 равно 2:3:4. 4. Площадь трапеции равна $16\sqrt{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}}$. Указание. Доказать, что радиус первой окружности равен 2, а радиус второй $2/\sqrt{3}$. Убедиться, что центр второй окружности лежит к вершине при большем основании трапеции ближе, чем центр первой окружности. Записать уравнение, означающее, что расстояние от вершины при большем основании трапеции до центра O_1 равно расстоянию от той же вершины до центра O_2, сложенному с расстоянием между центрами. Далее воспользоваться тем фактом, что квадрат диаметра окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен произведению длин оснований трапеции. 5. Указание. Рассмотреть графики функций $y = 2x - x^2$, $y_2 = \frac{2}{x}$ и показать, что при $0 < x \leqslant 2$ график функции y_1 лежит не выше прямой $y = 1$, а график функции y_2 — не ниже этой прямой.

Химический факультет

1. 10 *м/ч*. 2. $-1 < x < -\frac{1}{2}(\log_3 26 - 1)$, $\frac{1}{2}(\log_3 26 - 1) < x < 1$. Указание. Заметить, что $x^2 = |x|^2$, и обозначить $|x|$ через z. 3. $\sqrt{3}$. 4. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (k — целое). 5. 2.

К статье «На рыбалке»

1. Из разговора ребят можно сделать вывод, что двое из них, в том числе Петя, учатся в одном классе (у Иннокентия Петровича), а третий — в другом (у Николая Геннадиевича). Ребята, учащиеся в одном классе, поймали по окуню, тогда как у поймавшего больше всех рыбы окуней не оказалось. Следовательно, тот, кто поймал больше всех рыбы, — не Петя, и учится он у Николая Геннадиевича. Но у Васи не самый большой улов, поэтому больше всех рыбы мог поймать только Коля. Значит Вася учится у Иннокентия Петровича.

2. Обозначим через n число пойманных рыб. Первый рыболов взял себе $(n-1)/3$ рыб, второй $[2(n-1)/3-1]/3 = (2n-5)/9$, третий $(4n-19)/27$. Надо найти наименьшее натуральное n, при котором числа $(n-1)/3$, $(2n-5)/9$ и $(4n-19)/27$ — целые. Положим $(4n-19)/27 = k$, тогда $n = (27k+19)/4$. При $k=3$ получаем ответ: $n = 25$ (при $k=1$ и $k=2$ получаются нецелые n). Кстати, при $k=-1$ получаем $n=-2$ — ответ Дирака.

КРОССВОРД

«Знаменитые ученые»

По горизонтали:

5. Один из основателей небесной механики. 6. Русский математик, основатель одного из наиболее важных направлений в теории вероятностей. 9. Физик, доказавший на опыте существование электромагнитных волн. 12. Один из создателей теории функций комплексной переменной. 13. Крупнейший математик XVIII—XIX столетий. 14. Физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. 17. Французский физик XIX века. 18. Физик и инженер, установивший закономерности работы тепловых машин. 19. Советский инженер, использовавший в своих конструкциях однополостный гиперболоид вращения. 22. Астроном, обнаруживший новую планету по данным, предвычисленным Леверье. 23. Физик-экспериментатор, работы которого положили начало ультрафиолетовой и инфракрасной фотографии. 25. Знаменитый датский физик. 26. Греческий математик, инженер и изобретатель I в. н. э. 30. Врач, один из первых сформулировавший закон превращения и сохранения энергии. 31. Основоположник кибернетики. 32. Астроном, который произвел точное определение радиуса Земли.

Номер готовили: В. Березин, А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шихanович

Номер оформили: М. Дубах, Г. Красиков, И. Смирнова, Э. Пономарева

зав. редакцией Л. Чернова

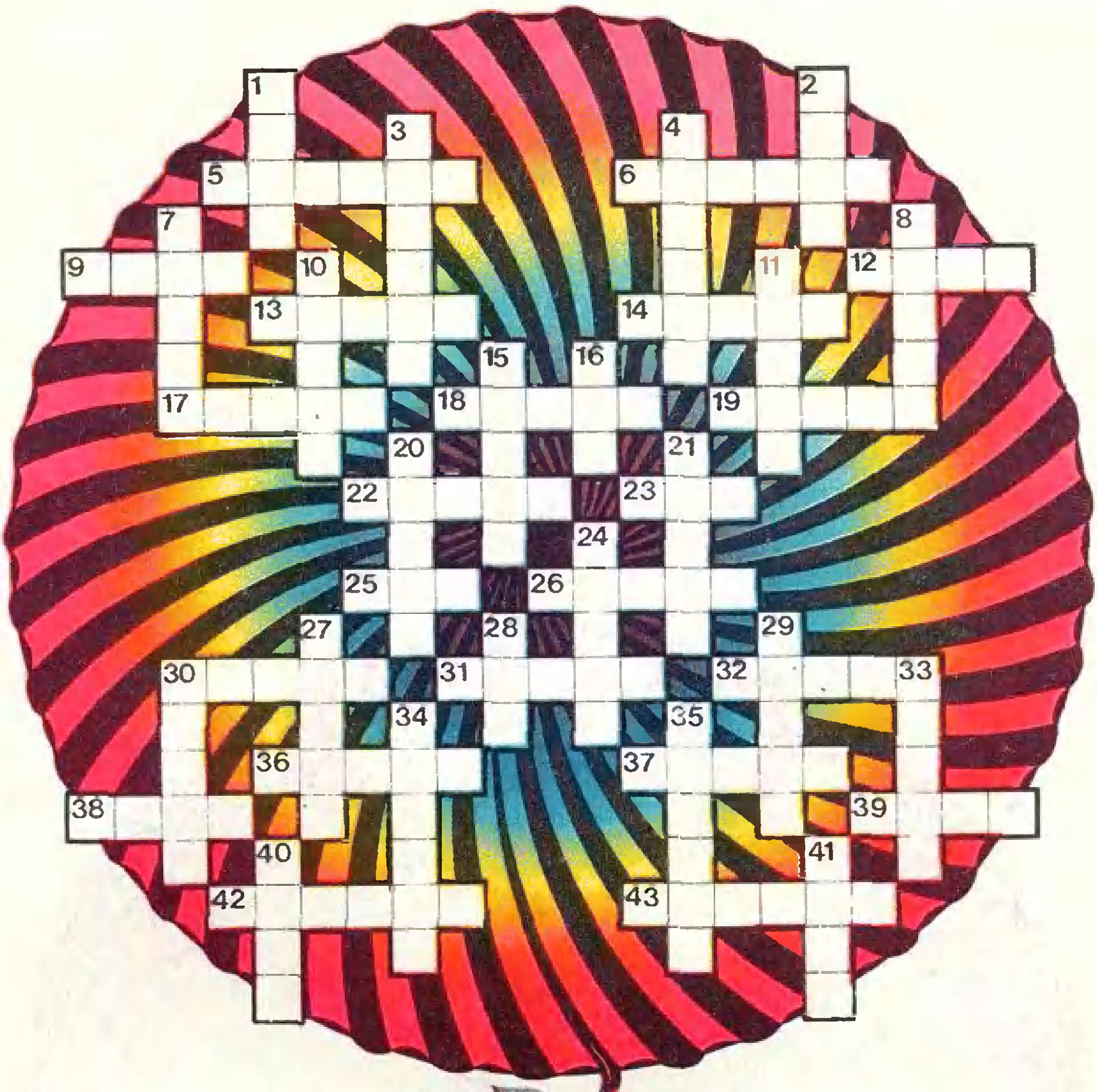
художественный редактор Т. Макарова

Корректор В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/X-76 г.
Подписано в печать 29/XI-76 г.
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,20. Уч.-изд. л. 6,45
Цена 30 коп. Заказ 2384 Тираж 294 725 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



36. Французский физик и математик, установивший закон взаимодействия электрических токов. 37. Астроном, впервые доказавший, что наша звездная система — не единственная во Вселенной. 38. Основоположник математической логики. 39. Физик, доказавший волновую природу рентгеновских лучей. 42. Немецкий *математик, основоположник* теории множеств. 43. Физик, один из изобретателей прибора, позволяющего считать отдельные заряженные микрочастицы.

По вертикали:

1. Французский математик, впервые применивший в алгебре буквенные обо*значения*. 2. Русский физик-теоретик. 3. Немецкий физик, разработавший теорию электролитического растворения металлов. 4. Английский математик, обладавший феноменальной памятью. 7. Английский физик, сконструировавший спинтарископ. 8. Изобретатель радио. 10. Индийский физик, лауреат Нобелевской премии. 11. Великий французский математик, живший в *XIX* столетии. 15. Физик, высказавший гипотезу о существовании нейтрино. 16. Выдающийся английский ученый XVIII—XIX столетий. 20. Один из основоположников квантовой электроники. 21. Французский физик, сформулировавший законы сухого трения. 24. Один из основателей теории логарифмов. 27. Французский математик, один из создателей теории чисел. 28. Физик, теоретически обосновавший один из законов излучения черного тела. 29. Один из основателей химической термодинамики и статистической механики. 30. Английский физик, установивший зависимость длин волн рентгеновских лучей от величины заряда ядра. 33. Выдающийся немецкий математик *XIX* века. *34. Основоположник отечественной* электротехники. 35. Астроном, один из пионеров применения спектрального анализа в астрономии. 40. Выдающийся английский изобретатель XVIII—XIX столетий. 41. Русский физик, установивший закон выделения тепла электрическим током в проводниках.

Г. Цеслер

Цена 30 коп.
Индекс 70465

На этом рисунке вы видите семейство кривых Уатта. Об этих кривых вы можете прочитать на с. 20.